

# MÉTODOS MATEMÁTICOS I

Curso 2023/2024

Apuntes y problemas. Temas 1, 2, 3.

11 de septiembre de 2023



# Índice general

<b>Prólogo.</b>	<b>4</b>
<b>1. El sistema de los números reales y el de los complejos.</b>	<b>6</b>
1.1. Introducción.	6
1.2. Definición axiomática de los números reales.	6
1.3. Intervalos en la recta real.	8
1.4. Números enteros, racionales e irracionales.	8
1.5. Cotas. Elemento máximo y mínimo. Extremo superior e inferior.	11
1.6. El axioma de completitud.	11
1.7. Representación decimal de los números reales.	12
1.8. Potencias y logaritmos.	13
1.9. Valor absoluto y desigualdad triangular.	13
1.10. La extensión $\mathbb{R}^*$ de los números reales.	14
1.11. Numerabilidad.	14
1.12. El sistema de números complejos $\mathbb{C}$ .	15
1.13. Ejercicios.	20
<b>2. Elementos de topología en conjuntos de puntos.</b>	<b>28</b>
2.1. Introducción.	28
2.2. Espacios normados y espacios métricos.	29
2.3. Conjuntos abiertos y cerrados.	31
2.4. Puntos adherentes y puntos de acumulación.	33
2.5. Conjuntos compactos.	35
2.6. Espacios topológicos.	35
2.7. Ejercicios.	36
<b>3. Límites y continuidad.</b>	<b>41</b>
3.1. Introducción.	41
3.2. Sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy.	42
3.3. Espacios métricos completos.	45
3.4. Funciones y límites de funciones.	46
3.5. Funciones continuas.	48
3.6. Continuidad y antiimágenes de conjuntos abiertos y cerrados.	50
3.7. Continuidad sobre conjuntos compactos.	52
3.8. Teorema de Bolzano.	53
3.9. Continuidad uniforme.	54
3.10. Discontinuidad de las funciones reales.	56
3.11. Ejercicios.	57

# Prólogo.

Estimado alumno:

Tienes ante tí unos apuntes para la asignatura *Métodos Matemáticos I* del grado en física. Salvo pequeñas modificaciones o añadidos, son en gran medida resúmenes elaborados a partir de los tres primeros libros que se relacionan en la bibliografía básica. Hemos puesto también unos cuantos libros más de bibliografía complementaria y otros de problemas. Por supuesto, a tu disposición existen muchos otros buenos libros de matemáticas en la biblioteca de la facultad de física. Al finalizar el curso deberías, como mínimo, comprender todo el material de estos apuntes y ser capaz de resolver por tí mismo todos los problemas propuestos, u otros parecidos. Aparte del estudio de estos apuntes recomendamos leer también las partes relevantes de alguno de los libros de la bibliografía, o al menos consultarlos con frecuencia. Los propios libros de texto (además de los de problemas) contienen más ejercicios, algunos resueltos, que puedes usar como entrenamiento adicional.

## Profesores de la asignatura en el curso 2022/23:

- Carlos Carballeira Romero. Departamento de Física da Materia Condensada, despacho 120, bloque I, edificio Facultade de Física.
- Abraham Antonio Gallas Torreira. Departamento de Física de Partículas, despacho 10A, bloque IV, edificio Monte da Condesa.
- José Luis Rodríguez Sánchez. Departamento de Física de Partículas, despacho 7, bloque V, edificio Monte da Condesa.
- Edgar Lemos Cid. Departamento de Física de Partículas, Aula de traballo 2, bloque IV, edificio Monte da Condesa.
- Alexandre Brea Rodríguez. Departamento de Física de Partículas, despacho 26, bloque IV, edificio Monte da Condesa.

## Bibliografía básica:

1. T.M. Apostol. *Análisis Matemático*, 2<sup>a</sup> ed. Ed. Reverté.
2. T.M. Apostol. *Calculus*, 2<sup>a</sup> ed., Vol. 1, 2. Ed. Reverté.
3. J. de Burgos. *Cálculo Infinitesimal de una Variable*. Ed. McGraw-Hill.
4. R.E Larson, R.P. Hostetler. *Cálculo y Geometría Analítica*. Ed. McGraw-Hill.
5. K.F. Riley, M.P. Hobson, S.J. Bence. *Mathematical methods for physics and engineering: a comprehensive guide*. Ed. Cambridge University.
6. J. de Burgos. *Cálculo de una Variable Real (Definiciones, Teoremas y Resultados)*. Ed. García-Maroto.
7. F. Ayres. *Cálculo Diferencial e Integral*. Serie Schaum, Ed. McGraw-Hill.

**Bibliografía complementaria:**

1. J.A. Fernández Viña. *Análisis Matemático*, Vol. 1,2,3, 2ª ed. Ed. Tecnos.
2. M. Spivak. *Calculus*, 2ª ed. Ed. Reverté.
3. M. de Guzmán y B. Rubio. *Problemas, conceptos y métodos del análisis matemático*, Vols. 1,2,3. Ed. Pirámide.
4. W. Rudin. *Principios de Análisis Matemático*. Ed. McGraw-Hill.
5. J. de Burgos *et al.* *Sucesiones y Series (Definiciones, Teoremas y Resultados)*. Ed. García-Maroto.

**Libros de problemas:**

1. B. Demidovich. *Problemas y Ejercicios de Análisis Matemático*. Ed. Mir.
2. F. Bombal, L. Rodríguez, G. Vera. *Problemas de Análisis Matemático*, Vols 1,2,3. Ed. AC.
3. J.A. Fernández Viña, E. Sánchez Mañes. *Ejercicios y Complementos de Análisis Matemático*, Vols. 1,2, 4ª ed. Ed. Tecnos.
4. M. Spivak. *Suplemento del Calculus*. Ed. Reverté.

# Capítulo 1

## El sistema de los números reales y el de los complejos.

### 1.1. Introducción.

En este primer tema estudiaremos las propiedades básicas de los números reales, cuyo conjunto denotaremos por  $\mathbb{R}$ . Comenzamos introduciendo el conjunto  $\mathbb{R}$  mediante diez axiomas. Los cinco primeros establecen las propiedades de dos operaciones internas, suma y multiplicación, que dotan a dicho conjunto de la estructura algebraica de cuerpo. Los cuatro siguientes establecen una relación de orden en  $\mathbb{R}$ , y el último es el axioma de completitud. Definiremos los conjuntos de números enteros ( $\mathbb{Z}$ ), racionales ( $\mathbb{Q}$ ) e irracionales ( $\mathbb{I}$ ) como subconjuntos especiales de  $\mathbb{R}$ . Daremos una representación geométrica de los números reales mediante una línea recta, el concepto y los diferentes tipos de intervalos que se pueden tomar sobre dicha recta y las nociones de cota superior (inferior), supremo (ínfimo) y máximo (mínimo) de conjuntos de números reales. Seguidamente discutiremos las diferencias y similitudes entre  $\mathbb{R}$  y algunos de sus subconjuntos, particularmente  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Q}$ . El objetivo de esta discusión será demostrar la necesidad del axioma de completitud en la definición de  $\mathbb{R}$ . El conjunto  $\mathbb{Q}$  a diferencia de  $\mathbb{R}$  no satisface este axioma, que si bien puede resultar inicialmente muy abstracto, es precisamente el que permite garantizar la existencia de solución en  $\mathbb{R}$  para la ecuación  $y = x^2$ , que no tiene solución en  $\mathbb{Q}$ .

Finalizaremos el tema con una introducción al sistema de los números complejos, presentándolos inicialmente como pares de números reales (es decir, puntos del plano  $\mathbb{R}^2$ ) sobre los que se definen de modo axiomático la suma y multiplicación complejas. Verificaremos a continuación algunas consecuencias de esta definición, como la estructura de cuerpo de los números complejos, su interpretación como extensión de los números reales y su similitud con  $\mathbb{R}^2$ . Seguidamente, introduciremos la unidad imaginaria con el objeto de definir la forma binómica de un número complejo y discutir las ventajas que ésta presenta a la hora de operar con este tipo de números y representarlos gráficamente en el plano. A partir de esta representación gráfica introduciremos los conceptos de módulo, argumento y forma exponencial de un número complejo, resaltando la utilidad de esta última para realizar multiplicaciones y divisiones. Por último, apoyándonos en esta notación exponencial, definiremos y estudiaremos las propiedades básicas de algunas funciones elementales de números complejos, como la radicación, potenciación, la función exponencial, el logaritmo y las funciones trigonométricas.

Como ya sabes, las magnitudes y fenómenos físicos toman valores y se describen mediante números reales. Por lo tanto, es evidente que para un físico es fundamental conocer las propiedades básicas de este tipo de números. En cuanto a los números complejos, es posible que sean completamente nuevos para ti, o que anteriormente sólo los hayas estudiado de forma simplificada en el bachillerato. En todo caso es muy importante que te familiarices con ellos y con sus propiedades cuanto antes, pues los números complejos juegan un papel fundamental en el estudio de los fenómenos ondulatorios que aparecen en la práctica totalidad de las áreas de la física: óptica, electromagnetismo, mecánica cuántica, física del estado sólido, etc. De hecho, en la titulación hay una asignatura (Métodos Matemáticos VI) dedicada casi por entero al estudio de los números complejos y de las funciones de variable compleja.

### 1.2. Definición axiomática de los números reales.

La existencia de números irracionales ha motivado largas e intensas reflexiones en los matemáticos desde la antigüedad. Las respuestas a preguntas como ¿existe un número cuyo cuadrado sea dos? ó,

¿cómo se puede *construir* el número  $\pi$ ?, pueden basarse en argumentos geométricos intuitivos, porque  $\sqrt{2}$  es la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado unidad, y  $\pi$  es el cociente entre la longitud de una circunferencia y su diámetro. De todos modos, estas respuestas basadas en la intuición geométrica son insatisfactorias y, desde luego, no sirven para todos los números irracionales. Es deseable no apelar a la intuición y establecer un conjunto de *reglas* o *axiomas* que nos permitan demostrar todas las propiedades que necesitamos de los números reales.

Hacia mediados del siglo XIX se alcanzó un consenso sobre un conjunto de axiomas adecuado para los números reales, que son esencialmente los que nosotros enunciaremos a continuación. La *construcción explícita* del conjunto de los números reales resulta un proceso laborioso, aunque no demasiado difícil, y no lo haremos aquí. Nuestra postura en este curso será considerar los números reales como conceptos primitivos que satisfacen ciertas propiedades que se toman como axiomas<sup>1</sup>.

En la mayoría de los casos, el establecimiento de un sistema axiomático formal es el paso final, no el inicial, en el desarrollo de las matemáticas. Se llegó al conjunto idóneo de axiomas para los números reales después de siglos de ensayo y error, y sólo después de que los teoremas básicos de la disciplina hubieran sido ya descubiertos. Al presentar aquí la definición axiomática de los números reales nuestro propósito es sólo establecer, a modo de referencia, cuáles son las hipótesis sobre las que descansan todas sus propiedades, pero no deducirlas directamente a partir de los axiomas, salvo quizás en algún ejemplo ilustrativo.

Supondremos que existe un conjunto no vacío,  $\mathbb{R}$ , cuyos elementos llamaremos números reales, y que satisfacen diez axiomas que clasificamos en tres grupos: *axiomas de cuerpo*, *axiomas de orden*, y *axioma de completitud*.

### Axiomas de cuerpo.

En lo que sigue,  $x, y, z$  serán números reales arbitrarios mientras no se especifique alguna condición especial. Suponemos, junto con  $\mathbb{R}$ , la existencia de dos operaciones internas (suma y producto) tales que  $x + y \in \mathbb{R}$  y  $xy \in \mathbb{R}$  para todo par  $x, y$  de  $\mathbb{R}$

Axioma 1:  $x + y = y + x, \quad xy = yx.$  (leyes conmutativas).

Axioma 2:  $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad x(yz) = (xy)z.$  (leyes asociativas).

Axioma 3:  $x(y + z) = xy + xz.$  (ley distributiva).

Axioma 4: Dados  $x$  e  $y$ , existe un  $z$  tal que  $x + z = y$ . Dicho número se designará por  $y - x$ , y  $x - x$  se escribirá como 0, que es independiente de  $x$ . Escribiremos  $-x$  en lugar de  $0 - x$ . Al elemento  $-x$  se le llamará opuesto de  $x$ .

Axioma 5: Existe, por lo menos, un número real  $x \neq 0$ . Dados dos números reales  $x$  e  $y$ , con  $x \neq 0$ , entonces existe un  $z$  tal que  $xz = y$ , que designaremos por  $y/x$ . El número  $x/x$  se escribirá como 1 y es independiente de  $x$ . Podremos escribir  $x^{-1}$  en lugar de  $1/x$  si  $x \neq 0$ . Al elemento  $x^{-1}$  lo llamaremos recíproco o inverso de  $x$ .

A partir de estos cinco axiomas se pueden deducir todas las reglas usuales de la aritmética.

### Axiomas de orden.

Suponemos la existencia de una relación denotada por  $<$ , que establece una ordenación entre los números reales y que satisface los siguientes axiomas.

Axioma 6: Se verifica una, y sólo una, de las siguientes relaciones para todo  $x, y \in \mathbb{R}$

$$x = y, \quad x < y, \quad x > y, \quad (x > y \text{ significa lo mismo que } y < x)$$

Axioma 7: Si  $x < y$ , entonces para todo  $z$  se cumple  $x + z < y + z$ .

<sup>1</sup>Desde un punto de vista matemático formal, la construcción explícita del conjunto de los números reales es importante, no basta con formular una serie de axiomas. El matemático se pregunta si realmente *existen* objetos que satisfagan estos axiomas, no vaya a ser que estemos exigiendo unas reglas imposibles de cumplir.

Axioma 8: Si  $x > 0$ , e  $y > 0$ , entonces  $xy > 0$ .

Axioma 9: Si  $x > y$ , e  $y > z$ , entonces  $x > z$ .

**Definición 1** Si  $x > 0$  diremos que  $x$  es positivo. Si  $x < 0$  diremos que  $x$  es negativo. Denotaremos  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  y  $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ . Se usa la notación  $x \leq y$  para abreviar la condición  $x < y$  ó  $x = y$ .

La notación  $\{x \mid x \text{ verifica } P\}$  representa el conjunto de todos los elementos  $x$  que verifican la propiedad  $P$ . También se suele escribir como  $\{x : x \text{ verifica } P\}$ .

Nos queda por enunciar el denominado *axioma de completitud* para terminar la definición axiomática de los números reales, pero lo dejamos para un poco más adelante porque necesitamos introducir previamente la noción de *supremo* de un conjunto de números reales.

El siguiente teorema, que se usa mucho en las demostraciones de análisis matemático, nos permite familiarizarnos con el uso de cantidades infinitesimales.

**Teorema 1** Si  $a$  y  $b$  son números reales tales que  $a \leq b + \varepsilon$  para *todo*  $\varepsilon > 0$ , entonces se cumple que  $a \leq b$ .

*Demostración*: Supongamos, en contra de lo que asegura el teorema, que fuese  $b < a$ . Entonces si tomamos  $\varepsilon = (a - b)/2$  tendríamos

$$b + \varepsilon = b + \frac{a - b}{2} = \frac{a + b}{2} < \frac{a + a}{2} = a.$$

Esto es lo mismo que escribir  $a > b + \varepsilon$ , en contra de la hipótesis inicial del teorema<sup>2</sup>.

### 1.3. Intervalos en la recta real.

Los números reales pueden ser representados geoméricamente como puntos de una recta, denominada *recta real*, en la que la relación de orden que hemos definido tiene una interpretación geométrica simple:  $x < y$  significa que  $x$  está a la izquierda de  $y$ , mientras que  $x > y$  significa que está a la derecha. Definimos a continuación los distintos tipos de intervalos en la recta real.

- Intervalo abierto:  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ .
- Intervalo cerrado:  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ .
- Intervalos semiabiertos:  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ ,  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ .
- Intervalos infinitos:  $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ ,  $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ ,  $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ .

Los símbolos  $+\infty$  y  $-\infty$  se usan aquí como mera notación, pero los definiremos adecuadamente más adelante.

### 1.4. Números enteros, racionales e irracionales.

#### Los números enteros.

Introducimos los números enteros como un subconjunto de números reales con propiedades especiales.

<sup>2</sup> El símbolo  $\leq$  puede resultar un poco confuso al principio. Recordemos que la notación  $x \leq y$  significa  $x < y$  ó  $x = y$ , es decir, que una de las dos expresiones es válida, pero no ambas (si una es cierta la otra no puede serlo, obviamente). Las expresiones  $4 \leq 5$  y  $4 < 5$  son ambas correctas.

**Definición 2** Un conjunto de números reales se denomina conjunto inductivo si cumple las dos propiedades siguientes:

- (a) El número 1 está en el conjunto.  
 (b) Para todo  $x$  del conjunto, el número  $x + 1$  también está en el conjunto.

**Definición 3** Un número real se denomina entero positivo si pertenece a cada uno de los conjuntos inductivos de  $\mathbb{R}$ . Denotaremos al conjunto de los enteros positivos por  $\mathbb{Z}^+$ . A los enteros no negativos  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$  se les suele llamar números naturales<sup>3</sup>, en cuyo caso el conjunto se denota por  $\mathbb{N}$ .

$\mathbb{Z}^+$  es también, él mismo, un conjunto inductivo. En realidad  $\mathbb{Z}^+$  es el menor de los conjuntos inductivos, en el sentido de que es un subconjunto de todos los conjuntos inductivos. A esta propiedad de  $\mathbb{Z}^+$  se le suele llamar *principio de inducción*. Ejercitaremos la técnica de *demostración por inducción* en algunos de los problemas propuestos.

Los opuestos de los enteros positivos se llaman enteros negativos,  $\mathbb{Z}^-$ . El conjunto de todos los enteros es la unión de estos tres:  $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$ .

### El símbolo sumatorio.

La suma  $S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$  puede escribirse abreviadamente por medio del símbolo sumatorio, para el que usamos la letra griega  $\Sigma$ :

$$S = \sum_{k=1}^7 k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

De modo más general, cuando queramos sumar un conjunto de  $n$  números arbitrarios, que podemos denotar por  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ , escribiremos

$$S = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Para ilustrar la técnica matemática de *demostración por inducción* vamos a probar la validez de la fórmula

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La demostración consta de dos pasos, primero comprobamos la validez de la fórmula para  $n = 1$  y luego comprobamos que si la fórmula es cierta para  $n$  entonces también lo es para  $n + 1$ . En el caso que nos ocupa es obvio que la fórmula se verifica para  $n = 1$ , ahora veamos si la siguiente implicación es cierta:

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2} \stackrel{?}{\implies} \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

En efecto, es cierta porque

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^n k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

**Definición 4** Dado  $n \in \mathbb{Z}^+$ ,  $n > 1$ , se denomina primo si no tiene divisores distintos de él mismo. En caso contrario se denomina compuesto.

**Teorema 2** No existe un número primo máximo.

<sup>3</sup>Puede que en algún libro veas una definición de número natural que no incluya al 0, como en el de *Juan de Burgos* que tienes en la bibliografía. Esto no es importante, aunque conviene no mezclar definiciones distintas. Podemos en todo caso usar la denominación *entero no negativo* para referirnos al conjunto  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ , y usar el símbolo  $\mathbb{Z}^+$  para referirnos al conjunto  $\{1, 2, 3, \dots\}$ .

*Demostración:* Supongamos que existe un número finito de primos,  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Formamos entonces un nuevo número multiplicando todos los  $n$  primos y sumándole la unidad:

$$q = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$$

El número  $q$  así formado es distinto de todos los  $p_i$ , por lo tanto debería ser compuesto (no primo) y divisible por alguno de los primos de la lista  $p_1, p_2, \dots, p_n$  que hemos supuesto exhaustiva. Pero esto es imposible, porque ningún número primo puede dividir a la unidad. Hemos llegado entonces a un absurdo, de donde deducimos que la hipótesis inicial (número finito de primos) es falsa.

**Teorema 3** (*Descomposición única de enteros*). Todo entero  $n > 1$  puede ser representado como un producto de factores primos. Si se prescinde del orden, la descomposición es única.

Esto quiere decir que, dado  $z \in \mathbb{Z}^+$ ,  $z > 1$ , podremos escribirlo como un producto único de una cierta secuencia de números primos, cada uno de ellos elevado a una potencia  $x_i \geq 1$ :  $z = p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} \dots p_N^{x_N}$ . Ejemplo:  $z = 3^2 \cdot 5^1 \cdot 7^3 \cdot 17^2 = 4460715$ .

**Los números racionales.**

**Definición 5** Los cocientes de números enteros,  $a/b$ , con  $b \neq 0$ , se denominan números racionales. Simbólicamente:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

Si  $a, b \in \mathbb{Q}$ , entonces  $(a + b)/2 \in \mathbb{Q}$ , lo cual implica que entre cualquier par de números racionales hay una infinidad de números racionales, y no es posible hablar del número racional *inmediatamente inferior o posterior* a un número racional dado.  $\mathbb{Q}$  es un cuerpo.  $\mathbb{Z}$  no es un cuerpo porque el inverso de un entero no es en general un entero.

**Los números irracionales.**

**Definición 6** Si  $x \in \mathbb{R}$  y  $x \notin \mathbb{Q}$ , entonces  $x$  es un número irracional.

$$\mathbb{I} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \notin \mathbb{Q}\}$$

**Teorema 4** Si  $n \in \mathbb{Z}^+$  y no es un cuadrado perfecto, entonces  $\sqrt{n}$  es irracional.

*Demostración:* Consideremos en primer lugar el caso de que  $n$  no tenga ningún divisor  $> 1$  que sea cuadrado perfecto. Si suponemos que  $\sqrt{n}$  es racional llegaremos a una contradicción. En efecto, si escribimos  $\sqrt{n} = a/b$  donde  $a$  y  $b$  son enteros sin divisores comunes, tenemos  $a^2 = b^2 n$  y podemos en consecuencia afirmar que  $a^2$  es un múltiplo de  $n$ . Esto significa que  $a$  también es un múltiplo de  $n$ , porque  $n$  no tiene divisores que sean cuadrados perfectos. Para ver esto descomponemos  $a$  en factores primos, es decir,  $a = a_1^{x_1} a_2^{x_2} a_3^{x_3} \dots a_p^{x_p}$ , siendo cada  $x_i \geq 1$ , con  $i = 1, 2, \dots, p$ . Entonces  $a^2 = a_1^{2x_1} a_2^{2x_2} a_3^{2x_3} \dots a_p^{2x_p}$ , y como  $a^2$  es múltiplo de  $n$ , escribimos  $n = a_1^{y_1} a_2^{y_2} a_3^{y_3} \dots a_p^{y_p}$ , siendo  $y_i \leq 1$  por no tener ningún divisor que sea cuadrado perfecto. Esto implica que la descomposición en factores primos de  $n$  está contenida en la de  $a$ ; en otras palabras,  $a$  también es múltiplo de  $n$ .

Escribimos entonces  $a = cn$ , siendo  $c$  un entero. La ecuación  $a^2 = b^2 n$  se transforma en  $c^2 n^2 = b^2 n$ , ó bien  $b^2 = c^2 n$ . Por lo tanto  $b^2$  es un múltiplo de  $n$  y, razonando igual que en el

párrafo anterior deducimos que  $b$  es también un múltiplo de  $n$ . Llegamos a la conclusión de que tanto  $a$  como  $b$  son múltiplos de  $n$ , es decir, que  $n$  es un divisor común de  $a$  y  $b$ , cosa que contradice nuestra hipótesis de partida.

Para finalizar, consideremos ahora el caso de que  $n$  sí tenga un divisor que sea cuadrado perfecto, es decir,  $n = m^2k$ , siendo  $k > 1$  un entero que no tiene divisores  $> 1$  que sean cuadrados perfectos<sup>4</sup>. Entonces  $\sqrt{n} = m\sqrt{k}$ , lo cual quiere decir que si  $\sqrt{n}$  fuese racional,  $\sqrt{k}$  también lo sería, cosa que contradice la primera parte de la demostración.

Este teorema puede generalizarse sin dificultad para afirmar que si  $n \in \mathbb{Z}^+$  y no es una potencia  $m$ -ésima perfecta, entonces  $\sqrt[m]{n}$  es irracional.

## 1.5. Cotas. Elemento máximo y mínimo. Extremo superior e inferior.

**Definición 7** Sea  $S \subset \mathbb{R}$ . Si existe un  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $x \leq b$  para todo  $x \in S$ , entonces  $b$  es una cota superior de  $S$ . Se dice que  $S$  está acotado superiormente por  $b$ .

Cualquier  $c > b$  es también una cota superior de  $S$ . Si  $b$  es una cota superior de  $S$  y además es un elemento de  $S$ , es decir,  $b \in S$ , entonces a  $b$  se le llama elemento máximo de  $S$  o **máximo**, y se suele denotar por  $\max(S)$ . Un conjunto que no tenga cotas superiores se dice no acotado superiormente. Los términos cota inferior, acotado inferiormente y elemento mínimo, o simplemente **mínimo**, se definen de manera análoga.

Ejemplos:

$\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$  no tiene mínimo ni cotas superiores, pero sí cotas inferiores.  $S = [0, 1]$  está acotado superior e inferiormente, además  $\max(S) = 1$  y  $\min(S) = 0$ . El conjunto  $S = [0, 1)$  no tiene máximo, está acotado y  $\min(S) = 0$ .

**Definición 8** Sea  $S \subset \mathbb{R}$  acotado superiormente.  $b \in \mathbb{R}$  se denomina extremo superior ó supremo, y se designa por  $\sup(S)$ , si verifica estas dos propiedades:

- (a)  $b$  es una cota superior de  $S$ .
- (b) Ningún número menor que  $b$  es una cota superior de  $S$ .

Por ejemplo,  $\sup[0, 1) = 1$ , pero no tiene máximo, o elemento máximo. El concepto de extremo inferior de  $S$ , o ínfimo, se define análogamente. Se denota por  $\inf(S)$ . El supremo de un conjunto es la menor de sus cotas superiores, y el ínfimo es la mayor de sus cotas inferiores. El  $\sup(S)$  y el  $\inf(S)$  no tienen por qué pertenecer necesariamente al conjunto  $S$ .

## 1.6. El axioma de completitud.

**Axioma 10:** Todo  $S \subset \mathbb{R}$  no vacío y acotado superiormente admite un supremo. Es decir, existe un  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $b = \sup(S)$ .

Como consecuencia de este axioma, todo conjunto de  $S \subset \mathbb{R}$  no vacío acotado inferiormente admite un ínfimo. En efecto, tomemos el conjunto de los números opuestos a los de  $S$ , que denotamos por  $-S$ . Está claro entonces que  $-S$  es un conjunto no vacío y está acotado superiormente, por lo tanto el axioma 10 nos dice que existe un número  $b$  que es su supremo. Es evidente que el ínfimo de  $S$  es  $-b$ .

Obsérvese que en  $\mathbb{Q}$  no se cumple este axioma. El conjunto  $S = \{(1 + \frac{1}{n})^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \subset \mathbb{Q}$  no tiene extremo superior o supremo en  $\mathbb{Q}$ . De hecho, veremos más adelante que su supremo es el número irracional  $e$ .

El siguiente teorema establece que todo conjunto de números reales con un supremo contiene números tan próximos como se quiera a dicho supremo.

<sup>4</sup>Obsérvese que aunque  $n$  tenga varios divisores que sean cuadrados perfectos, siempre se puede escribir como  $n = m^2k$ , siendo  $k > 1$  un entero que no tiene divisores  $> 1$  que sean cuadrados perfectos.

**Teorema 5** (Propiedad de la aproximación): Sea  $S \subset \mathbb{R}$  no vacío y  $b = \sup(S)$ . Entonces para todo  $a \in \mathbb{R}$ , siendo  $a < b$ , existe algún  $x \in S$  tal que  $a < x \leq b$ .

*Demostración:* Por ser  $b = \sup(S)$ , sabemos que  $x \leq b$  para todo  $x \in S$ . Por otro lado, si se cumpliera que  $x \leq a$  para todo  $x \in S$ ,  $a$  sería una cota superior de  $S$  menor que el supremo, que por definición es la cota superior mínima. Como esto es imposible, deducimos que ha de ser  $x > a$  para algún  $x \in S$ .

**Teorema 6** (Propiedad aditiva): Dados  $A$  y  $B$  subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}$ , definimos un nuevo conjunto  $C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ . Si tanto  $A$  como  $B$  tienen supremos, entonces también lo tiene  $C$  y viene dado por  $\sup(C) = \sup(A) + \sup(B)$ .

**Teorema 7** (Propiedad de la comparación): Dados  $S$  y  $T$  dos subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}$ , tales que  $s \leq t$  para todo  $s \in S$  y para todo  $t \in T$ , si  $T$  tiene supremo también lo tiene  $S$ , y se cumple que  $\sup(S) \leq \sup(T)$ .

**Teorema 8** (Propiedad arquimediana de los números reales): Dado  $x > 0$  e  $y \in \mathbb{R}$  arbitrario, existe un  $n \in \mathbb{Z}^+$  tal que  $nx > y$ .

Esto significa que todo segmento lineal de longitud  $y$ , por grande que sea, puede recubrirse por medio de un número finito  $n$  de segmentos lineales de longitud positiva  $x$  dada, por pequeña que sea.

## 1.7. Representación decimal de los números reales.

Para simplificar el tratamiento consideraremos en esta sección sólo los números reales positivos. La extensión a los negativos resultará evidente. Tomemos el número real dado por la siguiente expresión

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \dots + \frac{a_n}{10^n},$$

donde  $a_0$  es un entero no negativo y los  $a_i$  son enteros que satisfacen la condición  $0 \leq a_i \leq 9, i = 1, 2, \dots, n$ . Esta expresión se denomina representación decimal finita de  $r$ , y se escribe como  $r = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$ . Obsérvese que todo número real que pueda escribirse de este modo es necesariamente racional.

**Teorema 9** (Aproximación decimal finita de un número real): Supongamos un número real  $x \geq 0$ , entonces para todo entero  $n \geq 1$  existe un decimal finito  $r_n = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n$  tal que

$$r_n \leq x < r_n + \frac{1}{10^n}$$

Los números racionales  $r_n$  del teorema anterior pueden utilizarse para definir una representación decimal infinita del número real  $x$ .

Aunque definiremos el concepto de sucesión numérica y su límite en el capítulo 3, adelantamos aquí (para usarlo en la definición 12) que el conjunto infinito de los números racionales de esa representación decimal forma una *sucesión* cuyo límite es el número real representado. Simbólicamente escribiríamos  $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = x$ .

Todo número real puede escribirse como el límite de una sucesión de números racionales de ese tipo (más adelante veremos que se denominan sucesiones de Cauchy). El número entero 4 admite la representación decimal infinita trivial de 4,000000... (la representación periódica 3,99999... se considera equivalente a la anterior).

Se puede demostrar que toda representación decimal infinita periódica es un número racional. Ejemplo<sup>5</sup>

$$42,23 \overbrace{678} \overbrace{678} \overbrace{678} \dots = \frac{4223678 - 4223}{99900}$$

## 1.8. Potencias y logaritmos.

Recopilamos aquí, a modo de recordatorio, las definiciones de potencias y logaritmos.

**Definición 9** Potencias de base real y exponente entero. Dados  $x \in \mathbb{R}$  y  $n \in \mathbb{Z}$ , se define:

$$x^n = \begin{cases} \overbrace{x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x}^{(n)} & \text{si } n > 0 \\ 1/x^{|n|} & \text{si } n < 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

**Definición 10** Raíces de los números reales. Dados un número real  $x > 0$  y un entero positivo  $n \in \mathbb{Z}^+$ , existe un único número real  $y > 0$  tal que  $y^n = x$ . Se dice que  $y$  es la raíz  $n$ -ésima de  $x$  y se escribe  $y = \sqrt[n]{x}$ .

**Definición 11** Potencia de exponente racional. Dados un número real  $x > 0$  y un número racional  $p/q$ , con  $p \in \mathbb{Z}$  y  $q \in \mathbb{Z}^+$ , se llama potencia de base  $x$  y exponente  $p/q$  al número real  $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$ .

**Definición 12** Potencia de exponente real. Dados un número real  $x > 0$  y otro número real  $u = \lim_{n \rightarrow \infty} r_n$ , donde  $\{r_n\}$  es una sucesión de números racionales, se define  $x^u = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{r_n}$ .

**Definición 13** Logaritmo. Dados dos números reales  $x > 0$  y  $u > 0$ , con  $u \neq 1$ , existe un único número real  $y$  tal que  $u^y = x$ . Este número se denomina logaritmo en base  $u$  de  $x$ , y se denota escribiendo  $y = \log_u x$ . Es decir,  $\log_u x = y \iff u^y = x$ .

De especial importancia resultan los logaritmos *naturales*<sup>6</sup>, cuya base es el número irracional  $e$ . Suelen denotarse por  $\log x$  ó por  $\ln x$ .

## 1.9. Valor absoluto y desigualdad triangular.

**Definición 14** El valor absoluto de un número real  $x$  se denota por  $|x|$  y se define como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Teorema 10** Si  $a \geq 0$ , se cumple  $|x| \leq a$  si, y sólo si,  $-|a| \leq x \leq |a|$ .

**Teorema 11** (Desigualdad triangular):  $\forall x, y \in \mathbb{R}$  se cumple  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

*Demostración.* Tenemos  $-|x| \leq x \leq |x|$  e  $-|y| \leq y \leq |y|$ . Sumando ambas expresiones vemos que  $-(|x| + |y|) \leq x + y \leq (|x| + |y|)$ , y aplicando el teorema 10 con  $a = (|x| + |y|)$  deducimos que  $|x + y| \leq |x| + |y|$ .

<sup>5</sup>Usando la notación  $r = (n_1 - n_2)/d$ , el entero  $n_1$  se obtiene truncando la representación decimal de  $r$  en el lugar donde comienzan a repetirse periódicamente los grupos de cifras, y eliminando la coma decimal. El entero  $n_2$  se obtiene de  $n_1$  eliminando las cifras del período. El entero  $d$  se obtiene poniendo "tantos 9" como cifras tenga el período de  $r$ , y "tantos 0" como cifras existan entre la coma decimal y el inicio del período.

<sup>6</sup>También denominados logaritmos neperianos en honor del matemático John Neper.

Esta expresión se puede generalizar para obtener  $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$ . Otro modo de expresar la desigualdad triangular se obtiene poniendo  $x = a - c$ ,  $y = c - b$ , de donde se deduce que  $|a - b| \leq |a - c| + |c - b|$ . Más adelante veremos cómo se define la distancia, pero por ahora puede ser de ayuda observar que a la desigualdad triangular expresada de esta manera puede dársele el siguiente significado:  $\text{dist}(a, b) \leq \text{dist}(a, c) + \text{dist}(c, b)$ .

## 1.10. La extensión $\mathbb{R}^*$ de los números reales.

**Definición 15**  $\mathbb{R}$ , junto con los símbolos  $+\infty$  y  $-\infty$ , que satisfacen las siguientes propiedades, se llama sistema ampliado de los números reales, y lo denotaremos por  $\mathbb{R}^*$ .

(a)  $\forall x \in \mathbb{R}$  se cumple

$$x + (+\infty) = x - (-\infty) = +\infty, \quad x + (-\infty) = x - (+\infty) = -\infty, \quad x / (+\infty) = x / (-\infty) = 0,$$

(b)  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $x > 0$ , se cumple  $x(+\infty) = +\infty$ ,  $x(-\infty) = -\infty$ .

(c)  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $x < 0$ , se cumple  $x(+\infty) = -\infty$ ,  $x(-\infty) = +\infty$ .

(d)  $(+\infty) + (+\infty) = (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$ .  
 $(-\infty) + (-\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty$ .

(e) Si  $x \in \mathbb{R}$  entonces  $-\infty < x < +\infty$ .

Nota: No están definidas operaciones como  $(+\infty)/(+\infty)$ ,  $(+\infty)/(-\infty)$ ,  $0(+\infty)$ ,  $0(-\infty)$ ,  $(+\infty)-(+\infty)$ ,  $(-\infty)-(-\infty)$ , aunque sí está definido, por ejemplo,  $0/(+\infty) = 0$ .

$\mathbb{R}^*$  se designará también por  $[-\infty, +\infty]$ . Los puntos de  $\mathbb{R}$  se dicen finitos, mientras que los puntos  $+\infty$  y  $-\infty$  se dicen infinitos.

## 1.11. Numerabilidad.

**Definición 16** Se dice que un conjunto es finito y que tiene  $n$  elementos, si se pueden poner en correspondencia uno a uno (biyectiva) con el conjunto  $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ . Un conjunto que no es finito se denomina infinito.

**Definición 17** Un conjunto  $S$  es numerable si se verifica una de estas dos condiciones:

(a)  $S$  es finito.

(b)  $S$  es infinito y existe una correspondencia uno a uno entre  $\mathbb{Z}^+$  y  $S$ .

Los términos *numerable* y *no numerable* se sustituyen a veces por *contable* y *no contable*.

**Teorema 12**  $\mathbb{Q}$  es infinito numerable.

Los elementos de  $\mathbb{Q}$  se pueden contar siguiendo las diagonales de la siguiente matriz infinita<sup>7</sup>.

$$\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \cdots \\ & \frac{2}{1} & \frac{2}{2} & \frac{2}{3} & \frac{2}{4} & \frac{2}{5} & \frac{2}{6} & \cdots \\ & & \frac{3}{1} & \frac{3}{2} & \frac{3}{3} & \frac{3}{4} & \frac{3}{5} & \frac{3}{6} & \cdots \end{array}$$

<sup>7</sup>De este modo aparecen repetidos elementos de  $\mathbb{Q}$ , como  $1/1$ ,  $2/2$ , etc., pero ello no invalida el argumento.

**Teorema 13**  $\mathbb{R}$  es infinito no numerable.

*Demostración:* Basta demostrar que el subconjunto  $(0, 1) \subset \mathbb{R}$  es no numerable. Si lo fuese, existiría una sucesión<sup>8</sup>  $\{s_n\}$  cuyos términos constituirían todo el intervalo. Escribamos los  $s_n$  como decimales infinitos, es decir,  $s_n = 0, u_{n_1} u_{n_2} u_{n_3} \dots$ , donde cada  $u_{n_i} = 0, 1, \dots, 9$ . Ahora construimos el siguiente número real:

$$y = 0, v_1 v_2 v_3 \dots, \quad \text{donde} \quad v_n = \begin{cases} 1 & \text{si } u_{n_n} \neq 1 \\ 2 & \text{si } u_{n_n} = 1 \end{cases}$$

Ningún término de la sucesión  $\{s_n\}$  puede ser igual a  $y$ , con lo cual hemos demostrado que los elementos del intervalo  $(0, 1)$  no pueden ser “contados” (puestos en equivalencia uno a uno con los elementos de una sucesión). El conjunto  $(0, 1) \subset \mathbb{R}$  no es numerable, y por lo tanto  $\mathbb{R}$  tampoco.

## 1.12. El sistema de números complejos $\mathbb{C}$ .

Históricamente los números complejos surgieron a partir del esfuerzo de los matemáticos por deducir fórmulas generales algebraicas para encontrar las soluciones de las ecuaciones polinómicas de tercer y cuarto grado. Consideremos por ejemplo la ecuación  $x^3 - 15x - 4 = 0$ . Es fácil comprobar que una posible solución es  $x = 4$ . El matemático italiano Gerolamo Cardano había encontrado ya en el siglo XVI la siguiente fórmula para obtener soluciones de la ecuación cúbica especial  $x^3 + ax + b = 0$ ,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

Si aplicamos esta fórmula a nuestro ejemplo tenemos

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Lo cual es un problema, porque no existe ningún número real cuyo cuadrado sea  $-121$ . Ahora bien, si insistimos en manipular el símbolo  $\sqrt{-1}$  según las reglas habituales del álgebra, sin preocuparnos por su significado, podemos comprobar fácilmente que

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + \sqrt{-121}.$$

En efecto, para evitar confusiones y hacer la notación más corta escribamos  $i = \sqrt{-1}$ , entendiendo que esto implica  $i^2 = -1$ . No sabemos todavía el significado del misterioso número  $i$ , todo lo que sabemos es que su cuadrado es  $-1$ , pero eso es todo lo que necesitamos en este momento. Con ayuda de este símbolo la ecuación anterior se escribe como

$$(2 + i)^3 = 2 + \sqrt{-1}\sqrt{121} = 2 + i11.$$

Puedes comprobar sin dificultad que la igualdad anterior es correcta<sup>9</sup>,

$$(2 + i)^3 = 2^3 + 3 \times 2^2 i + 3 \times 2 i^2 + i^3 = 2 + i11.$$

Estamos entonces autorizados a escribir

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}, \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}.$$

Ahora la fórmula de Cardano se nos convierte en

$$x = (2 + \sqrt{-1}) + (2 - \sqrt{-1}),$$

que proporciona la solución correcta  $x = 4$  porque los símbolos  $\sqrt{-1}$  se cancelan y no importa su significado. Así pues, aunque nos hemos atrevido a manipular un símbolo cuyo significado desconocemos,

<sup>8</sup>Definiremos el concepto de *sucesión* más adelante, pero las nociones previas que el lector probablemente ya tiene sobre sucesiones pueden ser suficientes aquí.

<sup>9</sup>Recuerda que  $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ .

el resultado final no depende de él y es correcto (el valor  $x = 4$  satisface la ecuación  $x^3 - 15x - 4 = 0$ ). El símbolo  $i$ , con la regla de que  $i^2 = -1$ , fue usado formalmente durante varios siglos en expresiones algebraicas con números reales sin una idea clara de su significado, justificando el procedimiento por el sencillo motivo de que los resultados finales eran correctos. A los números del tipo  $a + ib$  se les llamó números complejos, y hubo que esperar hasta la primera mitad del siglo XIX para que Gauss y Hamilton, de modo independiente y casi simultáneo, propusieran una interpretación geométrica de estos números y facilitasen su definición como pares ordenados de números reales cumpliendo ciertas propiedades.

La irrupción en la matemática de los números complejos recuerda en cierto modo a la de los números irracionales. Los matemáticos griegos, ante la imposibilidad de calcular el diámetro de un cuadrado de lado unidad usando sólo los números que conocían entonces (enteros y cocientes de enteros), hubieron de plantearse la posibilidad de que existiesen números *no racionales* como  $\sqrt{2}$ , aunque la definición, construcción y tratamiento riguroso de los números reales tuvo que esperar casi 25 siglos. Del mismo modo, la búsqueda de soluciones para ecuaciones como  $x^2 + 1 = 0$  condujo a la segunda gran ampliación del sistema de números conocidos. Es importante que el lector comprenda, no obstante, que el sistema de números complejos es mucho más que una curiosa invención matemática. Su utilidad en todas las ciencias y la ingeniería es enorme. Realmente son *mucho más* que números *imaginarios*.

**Definición 18** *Un número complejo es un par ordenado de números reales,  $z = (x, y)$ . Al primer miembro del par se le llama parte real,  $\text{Re}(z) = x$ , y al segundo parte imaginaria,  $\text{Im}(z) = y$ . Dos números complejos,  $z_1 = (x_1, y_1)$  y  $z_2 = (x_2, y_2)$ , son iguales si, y sólo si,  $x_1 = x_2$  e  $y_1 = y_2$ .*

**Definición 19** *Dados dos números complejos  $z_1 = (x_1, y_1)$  y  $z_2 = (x_2, y_2)$ , definimos su suma y su producto como:*

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \qquad z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

**Definición 20** *Dado  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  tal que  $z \neq (0, 0)$ , definimos*

$$\frac{1}{z} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

$\mathbb{C}$  tiene estructura algebraica de cuerpo. Los números complejos de la forma  $(x, 0)$  tienen las mismas propiedades algebraicas que los números reales. El conjunto  $\mathbb{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{C} \mid y = 0\}$  es isomorfo a  $\mathbb{R}$  y, evidentemente,  $\mathbb{C}_0 \subset \mathbb{C}$ , por lo tanto todo número real es un caso especial de número complejo.

**Definición 21** *Definimos la unidad imaginaria como  $i = (0, 1)$ .*

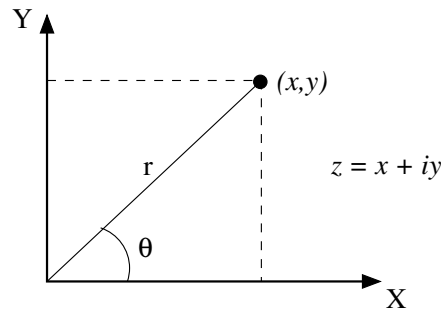
$i$  es solución de la ecuación  $x^2 + 1 = 0$ .

**Teorema 14** *Todo  $z \in \mathbb{C}$  puede escribirse como  $z = x + iy$ .*

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy.$$

**Definición 22** *Sea  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ . El conjugado de  $z$  es  $\bar{z} = x - iy = (x, -y)$ .*

**Representación geométrica:** Hemos definido los números complejos como pares ordenados de números reales,  $(x, y)$ , y por lo tanto están en correspondencia biunívoca con los puntos del plano. En otras palabras, a todo  $z = (x, y) \in \mathbb{C}$  le corresponde un punto del plano, y sólo uno. En esta representación geométrica al eje de abscisas se le llama eje real, y al de ordenadas eje imaginario. La suma de números complejos coincide con la suma habitual de vectores en el plano. El conjugado de  $z$  es el vector simétrico respecto del eje real.



**Coordenadas polares:** Denotando por  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  la distancia de un punto del plano al origen, y por  $\theta = \arctg(y/x)$  el ángulo que forma su vector de posición con el eje real, podemos escribir todo número complejo como  $z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta$ . Al ángulo  $\theta$  se le llama argumento del número complejo. Hay infinitos valores de  $\theta$  que satisfacen la ecuación  $z = x + iy = r \cos \theta + ir \sin \theta$ , y cada uno de ellos es un argumento de  $z$ . Se denomina *argumento principal* de  $z$  al valor de  $\theta$  que cumple  $\theta \in (-\pi, \pi]$ . A  $r$  se le llama módulo del número complejo, ó valor absoluto, y se denota también por  $|z|$ . El módulo de un número complejo verifica las mismas propiedades que el valor absoluto de los números reales, al cual se reduce en el caso particular de un número real.

$$|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \iff z = 0, \quad |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1|, \quad |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} \text{ si } z_2 \neq 0, \quad z \bar{z} = |z|^2$$

**Definición 23** *Argumento de un número complejo.* Sea  $z = x + iy \in \mathbb{C}$  un número complejo no nulo. El único número real  $\theta$  que satisface las condiciones

$$x = |z| \cos(\theta), \quad y = |z| \sin(\theta), \quad -\pi < \theta \leq +\pi$$

se llama el argumento principal de  $z$  y se denota por  $\theta = \arg(z)$ .

**Definición 24** *Exponencial compleja:* Dado  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , definimos  $e^z = e^{x+iy}$  como el número complejo  $e^x(\cos y + i \sin y)$ .

Para una justificación de esta definición puedes consultar el volumen 1 del libro *Calculus* de Tom M. Apostol (página 447 en la sección 9.7 de la edición de Reverté de 1991). Obsérvese que la exponencial compleja cumple las propiedades usuales de la exponencial real. Por ejemplo,  $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ . Obsérvese que  $e^z$  jamás es cero. Si  $x \in \mathbb{R}$  entonces  $|e^{ix}| = 1$ . Por otro lado,  $e^z = 1$  si, y sólo si,  $z$  es un múltiplo de  $2\pi i$ .

Usando la definición de exponencial compleja, todo número complejo  $z \neq 0$  puede escribirse como  $z = r e^{i\theta}$ , donde  $r$  es su módulo y  $\theta$  su argumento. Esta notación polar es muy útil para la multiplicación y la división de números complejos.

**Teorema 15** Si  $z \neq 0$  es un número complejo y  $n \in \mathbb{Z}^+$ , entonces existen exactamente  $n$  números complejos distintos,  $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$ , llamados raíces  $n$ -ésimas de  $z$ , tales que  $z_k^n = z$  para todo  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ . Estas raíces están dadas por la fórmula

$$z_k = |z|^{1/n} e^{i\phi_k}, \quad \text{con} \quad \phi_k = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Estas raíces están distribuidas equidistantemente sobre el círculo centrado en el origen y de radio  $r = |z|^{1/n}$ . A la hora de calcular las raíces  $n$ -ésimas de un cierto número complejo,  $z$ , lo primero que uno debe hacer es escribirlo como  $z = |z| e^{i(\theta+2k\pi)}$ , luego dividir el exponente entre  $n$ , y a continuación dar a  $k$  los valores  $0, 1, 2, \dots, n-1$  para obtener  $n$  números complejos distintos. Observa que si sigues dándole valores a  $k$  vuelves a obtener las mismas raíces que ya has encontrado, es decir, para  $k = n$  se obtiene la misma raíz que para  $k = 0$ , para  $k = n+1$  la misma que para  $k = 1$  etc.

**Definición 25** *Logaritmos complejos.* Sea  $z \neq 0$  un número complejo. Si  $w$  es otro número complejo tal que  $e^w = z$ , entonces  $w$  se denomina un logaritmo de  $z$ . El valor particular dado por  $w = \log |z| + i \arg(z)$  se llama logaritmo principal de  $z$ , y lo denotaremos por  $\text{Log}(z)$ .

$$\text{Log}(z) = \log |z| + i \arg(z)$$

Todo número complejo de la forma  $\log |z| + i \arg(z) + i2n\pi$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ , es también un logaritmo de  $z$ . En otras palabras, la función  $\log$  es multivaluada.

**Definición 26** *Potencias complejas.* Dado un número complejo  $z \neq 0$  y  $w \in \mathbb{C}$  cualquiera, definimos

$$z^w = e^{w \text{Log}(z)}$$

Obsérvese que definimos las potencias complejas de  $z$  sólo en términos de su logaritmo principal,  $\text{Log}(z)$ . Si no lo hacemos así encontraríamos dificultades en el caso especial de la exponenciación compleja, porque la notación  $e^{i\theta}$  podría representar múltiples números complejos. En efecto, si modificamos la definición  $z^w = e^{w \text{Log}(z)}$  sustituyendo el logaritmo principal por otro cualquiera, por ejemplo  $\log(z) = \text{Log}(z) + i2\pi$ , tendríamos lo siguiente para el caso  $z = e$ :

$$e^{i\theta} = e^{i\theta \log(e)} = e^{i\theta(1+i2\pi)} = e^{-2\pi\theta+i\theta} = e^{-2\pi\theta} e^{i\theta}.$$

Mientras que si nos restringimos a  $\text{Log}(e) = 1$ , tenemos:

$$e^{i\theta} = e^{i\theta \text{Log}(e)} = e^{i\theta}.$$

La definición que damos aquí es la que aparece en el libro *Análisis Matemático*, de T.M. Apostol, y nos lleva a una potenciación compleja *univaluada*. Sin embargo, en la mayoría de los libros de análisis complejo se usa la función multivaluada  $\log$ , en lugar del logaritmo principal  $\text{Log}$ , para definir la potenciación compleja, lo cual conduce a que la notación  $z^w$  pueda representar múltiples números complejos. Veremos otro ejemplo en los ejercicios.

Ahora que tenemos definida la potenciación compleja general podemos considerar también logaritmos en otra base distinta a  $e$ , es decir, logaritmos no naturales. Recordemos que los logaritmos reales en distintas bases se relacionan por medio de la siguiente expresión,

$$\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)},$$

Es fácil comprobar que esta igualdad se mantiene en el caso de números complejos, por lo tanto podremos escribir un logaritmo complejo en base genérica  $u$  de la siguiente forma,

$$\text{Log}_u(w) = \frac{\text{Log}(w)}{\text{Log}(u)},$$

Obsérvese que el par de ecuaciones

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos(\theta) + i \text{sen}(\theta) \\ e^{-i\theta} &= \cos(\theta) - i \text{sen}(\theta) \end{aligned}$$

conduce a

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{sen}(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Lo cual motiva la siguiente definición.

**Definición 27** *Senos y cosenos.* Dado  $z \in \mathbb{C}$  definimos:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \text{sen } z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Obsérvese que esta definición nos permite escribir  $e^{iz} = \cos(z) + i \text{sen}(z)$  para un número complejo arbitrario  $z$ . Por otra parte, cuando  $z$  es un número real la definición se reduce al

seno y coseno usual de un número real. En general los senos y cosenos de números complejos pueden ser mayores que la unidad. Ejemplo:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + i \log 2\right) &= \frac{e^{i(\pi/2+i \log 2)} - e^{-i(\pi/2+i \log 2)}}{2i} \\ &= \frac{e^{i\pi/2}e^{-\log 2} - e^{-i\pi/2}e^{\log 2}}{2i} = \frac{i(1/2) - (-i)(2)}{2i} = \frac{5}{4}\end{aligned}$$

Sin embargo, la relación  $\operatorname{sen}^2(z) + \operatorname{cos}^2(z) = 1$  se cumple siempre (compruébalo).

El  $\operatorname{sen}(z)$  y el  $\operatorname{cos}(z)$  cuando  $z$  es imaginario puro, es decir,  $z = iy$ , conducen a:

$$\operatorname{cos}(iy) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad \operatorname{sen}(iy) = \frac{e^{-y} - e^y}{2i} = i \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

Estas combinaciones de funciones reales resultantes para  $y$  reciben el nombre de coseno y seno hiperbólico.

$$\operatorname{cosh}(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2} \quad \operatorname{senh}(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

De modo que se cumplen las relaciones

$$\operatorname{cos}(iy) = \operatorname{cosh}(y), \quad \operatorname{sen}(iy) = i \operatorname{senh}(y)$$

Se pueden definir los senos y cosenos hiperbólicos para cualquier número, sea complejo o real puro.

**Definición 28** *Senos y cosenos hiperbólicos.* Dado  $z \in \mathbb{C}$  definimos:

$$\operatorname{cosh} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

En los ejercicios veremos que se verifica  $\operatorname{cosh}^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$ . Si tomamos  $x \in \mathbb{R}$ , podemos aprovechar la expresión  $\operatorname{cosh}^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$  para escribir las coordenadas de los puntos de la rama derecha de la hipérbola equilátera  $x^2 - y^2 = 1$  como  $(\operatorname{cosh} \theta, \operatorname{senh} \theta)$ , con  $\theta \geq 0$ , de ahí la denominación de funciones hiperbólicas.

### 1.13. Ejercicios.

1. Demostrar a partir de los axiomas de cuerpo de los números reales las siguientes proposiciones: Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ .

- a) Si  $a + b = a + c$ , entonces  $b = c$ .  
 b) Si  $ab = ac$  y  $a \neq 0$ , entonces  $b = c$ .  
 c)  $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$ .  
 d) El elemento 0 no tiene inverso.  
 e) Si  $ab = 0$ , entonces  $a = 0$  ó  $b = 0$ .  
 f) Si  $a \neq 0$  y  $b \neq 0$  entonces  $1/(ab) = (1/a)(1/b)$ .  
 g)  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$  si  $b \neq 0$  y  $d \neq 0$ .

2. Demostrar por inducción:

$$(a) \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \quad (b) \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$(c) \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (d) \sum_{i=0}^n x^i = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad x \neq 1$$

3. Demostrar la fórmula aditiva de los coeficientes combinatorios<sup>10</sup>, también conocida como *ley del triángulo de Pascal*,

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$

donde  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ ,  $n! = n(n-1)(n-2)\dots 1$ , y  $0! = 1$ .

4. Demostrar por inducción la fórmula del binomio de Newton:  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ .

5. Obtener las fórmulas de la suma de una progresión aritmética y de una progresión geométrica:

$$\sum_{i=0}^n a_i = \frac{n+1}{2}(a_0 + a_n), \quad a_i = a_0 + di \quad \sum_{i=0}^n b_i = \frac{b_0 - b_{n+1}}{1-r}, \quad b_i = b_0 r^i$$

6. Probar que  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  y  $\sqrt[3]{9}$  son irracionales.

7. Si  $a, b, c, d$  son racionales y  $x$  es irracional, probar que el número real  $\alpha = \frac{ax+b}{cx+d}$  es, en general, irracional. Dígase en qué casos se dan las excepciones.

8. Determinar el supremo y el ínfimo, si existen, de los siguientes conjuntos:

- a)  $A = \{r \in \mathbb{Q} \mid 2r^3 - 1 < 17\}$  como subconjunto de  $\mathbb{Q}$ .  
 b)  $M = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 2x < 2\}$  como subconjunto de  $\mathbb{R}$ .

9. Determina, si existen, el supremo, ínfimo, máximo y mínimo de los siguientes conjuntos:  $\mathbb{R}$ ;  $\mathbb{Q}$ ;  $A = (0, 1]$ ;  $B = \{x \in [0, 1] \cap \mathbb{I}\}$ ;  $C = \{x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}\}$ .

<sup>10</sup>Estos números aparecen en la resolución de problemas combinatorios. Supongamos que nos dan un conjunto de  $n$  letras distintas del alfabeto español y que nos piden calcular el número de posibles subconjuntos de  $k$  elementos (con  $k \leq n$ ). Tenemos  $n$  posibilidades distintas de escoger al primer elemento,  $n-1$  de escoger al segundo,  $n-2$  de escoger al tercero etc., es decir,

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Pero no todos esos subconjuntos son distintos. Para  $k=3$ , por ejemplo, los seis conjuntos siguientes son iguales,

$$\{a, b, c\}, \{b, c, a\}, \{c, a, b\}, \{a, c, b\}, \{c, b, a\}, \{b, a, c\}.$$

Con este método cada subconjunto de  $k$  elementos se cuenta exactamente  $k!$  veces, por lo tanto debemos dividir el número anterior por  $k!$  para obtener

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

10. Expresar los siguientes números complejos en las formas  $a + ib$  y  $re^{i\theta}$ .

$$\text{a) } (1 + i)^3 \quad \text{b) } \frac{2 + 3i}{3 - 4i} \quad \text{c) } i^5 + i^{16} \quad \text{d) } \frac{1}{2} \left( \frac{1 + i^{-8}}{1 + i} \right)$$

11. Probar las siguientes propiedades de la conjugación compleja:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2. & \text{d) } z + \bar{z} = 2\text{Re}(z). \\ \text{b) } \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2. & \text{e) } z - \bar{z} = 2i\text{Im}(z). \\ \text{c) } z\bar{z} = |z|^2. & \end{array}$$

12. Probar la fórmula de Moivre:

$$(\cos \theta + i \sen \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sen(n\theta)$$

siendo  $n$  un entero positivo y  $\theta$  un número real.

13. Demostrar que las raíces  $n$ -ésimas de 1 vienen dadas por  $\{\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^n\}$  con  $\alpha = e^{2\pi i/n}$ , y probar que las raíces distintas de 1 satisfacen  $1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^{n-1} = 0$ . Dado  $z$  un número complejo arbitrario y  $z_k$  sus raíces  $n$ -ésimas, probar que  $z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_{n-1} = 0$ . Dar una interpretación geométrica de este resultado.

14. A partir de las propiedades de la exponencial compleja, deduce las fórmulas para el coseno y seno de la suma de ángulos reales:  $\cos(\theta + \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) - \sen(\theta)\sen(\phi)$  y  $\sen(\theta + \phi) = \sen(\theta)\cos(\phi) + \cos(\theta)\sen(\phi)$ .

15. Demostrar las siguientes propiedades de las funciones trigonométricas hiperbólicas:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \cosh^2(a) - \senh^2(a) = 1. \\ \text{b) } \cosh^2(a) + \senh^2(a) = \cosh(2a). \\ \text{c) } \cosh(a + b) = \cosh(a)\cosh(b) + \senh(a)\senh(b). \\ \text{d) } \senh(a + b) = \senh(a)\cosh(b) + \cosh(a)\senh(b). \\ \text{e) } \senh(2a) = 2\senh(a)\cosh(a). \\ \text{f) } \cosh(2a) = 1 + 2\senh^2(a). \\ \text{g) } 1 - \tanh^2(a) = 1/\cosh^2(a). \\ \text{h) } 1 - \cotanh^2(a) = -1/\senh^2(a). \end{array}$$

16. Dado un número complejo  $z = x + iy$ , demostrar la expresiones:

$$\text{(a) } \cos z = \cos x \cosh y - i \sen x \senh y, \quad \text{(b) } \sen z = \sen x \cosh y + i \cos x \senh y.$$

17. La tangente de un número complejo se define como  $\text{tg } z = \sen z / \cos z$ . Demostrar que, para  $z = x + iy$  se cumple

$$\text{tg } z = \frac{\sen(2x) + i \senh(2y)}{\cos(2x) + \cosh(2y)}$$

18. Expresa en forma binómica, es decir, del modo  $(a + ib)$ , los siguientes números complejos.

$$\begin{array}{lll} \text{(a) } \text{Log}(i). & \text{(e) } (4 + 3i)/(5 - 6i). & \text{(i) } \pi^i. \\ \text{(b) } i^i. & \text{(f) } \exp(1 + i). & \text{(j) } \text{Log}(\pi^i). \\ \text{(c) } \cos(i). & \text{(g) } i^5 + i^{27}. & \text{(k) } \sqrt{3 - 4i}. \\ \text{(d) } \pi^2. & \text{(h) } i^e. & \end{array}$$

19. Supón que definimos la potenciación compleja en términos de la función logaritmo multivaluada (no el logaritmo principal), es decir, dado  $z = |z|e^{i\theta}$ , definimos  $z^w = e^{w \log(z)}$ , siendo  $\log(z) = \log(|z|) + i\theta + i2k\pi$ , con  $k \in \mathbb{Z}$ .

- Demuestra que con esta definición no se cumple en general que  $i^i i^{-i} = i^0 = 1$ .
- Usando esta definición determina los posibles valores de  $i^{1/3}$ . Observa que si hubiéramos usado sólo el logaritmo principal no habríamos obtenido las tres raíces de  $\sqrt[3]{i}$ .

20. Expresa en forma exponencial los números  $z_1 = -4 - 4i$ ,  $z_2 = (1 - i)^{3/2}$ . Calcula el logaritmo principal de  $z_3 = 4 + 3i$ .

## Capítulo 2

# Elementos de topología en conjuntos de puntos.

### 2.1. Introducción.

En este tema vamos a estudiar las propiedades topológicas de los conjuntos de números reales, duplas de números reales, triplas de números reales y, en general,  $n$ -tuplas de números reales que constituyen los espacios euclídeos  $n$ -dimensionales o  $\mathbb{R}^n$ . Comenzaremos generalizando conceptos ya utilizados en el estudio de la recta real al caso de tener productos cartesianos de varias rectas reales, con el objetivo de formular en primer lugar la definición de espacio vectorial ó espacio lineal. Esta generalización incluirá las operaciones fundamentales de suma, producto por un escalar y producto interior de dos vectores o puntos  $n$ -dimensionales. Utilizando esta última operación definiremos las nociones de norma o longitud de un vector y de distancia entre puntos  $n$ -dimensionales junto con sus propiedades, así como los conceptos de espacio normado y espacio métrico.

A continuación, utilizando la noción de bola abierta centrada en un punto que puede definirse a partir de cualquier distancia, introduciremos los conceptos topológicos básicos de los subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ , comenzando por los de punto interior, aislado, de acumulación, adherente y frontera. Ello nos permitirá definir los conjuntos abiertos como aquellos cuyos puntos son todos interiores, y a los conjuntos cerrados como aquellos cuyo complementario es abierto. Posteriormente relacionaremos las características de ambos tipos de conjuntos con las de su interior (conjunto de puntos interiores), adherencia (conjunto de puntos adherentes), conjunto derivado (conjunto de puntos de acumulación) y frontera (conjunto de puntos frontera). Finalizamos el tema con la definición de conjunto compacto como aquel que puede ser recubierto mediante una familia finita de conjuntos abiertos, estableciendo además la equivalencia entre esta definición y la propiedad de que el conjunto sea cerrado y acotado.

Con este tema se pretende, en primer lugar, que seas consciente de la importancia de los espacios  $n$ -dimensionales en Física. Lo más probable es que hasta ahora hayas estudiado problemas en, a lo sumo, tres dimensiones, pues el espacio en el que nos desenvolvemos habitualmente es tridimensional. Sin embargo, a lo largo de la titulación estudiarás con frecuencia problemas multidimensionales. Un ejemplo es el de la relatividad, donde tendrás que trabajar en un espacio tetradimensional que incluye, además de las tres dimensiones espaciales, al tiempo como cuarta dimensión. Otro ejemplo son los sistemas clásicos de  $N$  partículas cuyas propiedades estén determinadas por las posiciones y momentos de las mismas (mecánica estadística clásica), que nos conduce a plantear espacios de  $6N$ -dimensiones (espacios físicos). En mecánica cuántica incluso es necesario trabajar con espacios vectoriales de dimensión infinita. Además, una buena parte de las propiedades de las funciones, en especial las relacionadas con la continuidad, la derivabilidad y la integrabilidad, pueden estudiarse en términos de las características topológicas de sus dominios de definición y de sus imágenes. Por lo tanto, conocer las características de estos conjuntos es importante a la hora de utilizar funciones para la descripción de fenómenos físicos.

Otro de los objetivos de este tema es que amplíes el concepto que tienes de distancia más allá de la distancia euclídea que estás acostumbrado a utilizar en el espacio tridimensional. Otras métricas y distancias son posibles, y algunas de ellas tienen una importancia fundamental en Física, como la métrica de Minkowski que se emplea en relatividad. Además de eso, muchos fenómenos físicos se desarrollan en la superficie de una esfera, donde las distancias entre dos puntos no pueden establecerse directamente utilizando la métrica euclídea. Por ejemplo, si nos desplazamos desde Santiago hasta Nueva Zelanda, la distancia que recorreremos no es la distancia euclídea entre esos dos puntos del espacio tridimensional,

puesto que no atravesamos la tierra en línea recta sino que nos movemos sobre su superficie esférica.

## 2.2. Espacios normados y espacios métricos.

### El Espacio Euclídeo $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 29** Sea  $n \in \mathbb{Z}^+$ . El conjunto ordenado de  $n$  números reales  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  se llama punto  $n$  dimensional o vector con  $n$  componentes. Los puntos o vectores se designarán con una sola letra con flecha encima (o con negrita en la mayoría de los libros)

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

El número  $x_k$  es la  $k$ -ésima coordenada del punto  $n$  dimensional  $\vec{x}$ , ó la  $k$ -ésima coordenada del vector  $\vec{x}$ . El conjunto de todos los puntos  $n$  dimensionales se llama espacio euclídeo<sup>1</sup>  $n$ -dimensional, ó  $n$ -espacio, y se designa por  $\mathbb{R}^n$ .

El espacio más usual en física es  $\mathbb{R}^3$ , pero también son frecuentes espacios con más o menos dimensiones.  $\mathbb{R}^2$  ó  $\mathbb{R}^1$  si alguna coordenada se mantiene fija.  $\mathbb{R}^n$  con  $n > 3$  para los espacios de configuraciones con  $n$  grados de libertad en el estudio de la mecánica clásica, mecánica estadística, mecánica cuántica, relatividad (4 dim). Es incluso necesario en mecánica cuántica trabajar con espacios vectoriales de dimensión infinita. En todo caso, a partir de ahora para nosotros  $n$  será siempre un número entero positivo finito.

**Definición 30** Sean  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  e  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  dos elementos de  $\mathbb{R}^n$ . Definimos entonces lo siguiente:

- (a) Igualdad:  $\vec{x} = \vec{y}$  si, y sólo si,  $x_i = y_i$  para  $i = 1, \dots, n$ .
- (b) Suma:  $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ .
- (c) Multiplicación por escalares (números reales):  $a\vec{x} = (ax_1, ax_2, \dots, ax_n)$
- (d) Diferencia:  $\vec{x} - \vec{y} = \vec{x} + (-1)\vec{y} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$ .
- (e) Vector nulo u origen:  $\vec{0} = (0, \dots, 0)$ .
- (f) Producto interior o producto escalar:  $\vec{x}\vec{y} = \sum_{k=1}^n x_k y_k$ .

(g) Norma o longitudud:  $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x}\vec{x}} = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{1/2}$ .

La norma  $\|\vec{x} - \vec{y}\|$  se llama también distancia<sup>2</sup> entre  $\vec{x}$  e  $\vec{y}$ .  $\mathbb{R}^n$  es un ejemplo de espacio vectorial o espacio lineal. Las propiedades de la (a) a la (e) dotan a  $\mathbb{R}^n$  de estructura de espacio vectorial.

**Definición 31** El vector coordenado unidad  $\vec{u}_k$  de  $\mathbb{R}^n$  es el vector cuya  $k$ -ésima componente es 1 y todas las demás son cero.  $\vec{u}_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $\vec{u}_2 = (0, 1, \dots, 0)$ ,  $\vec{u}_n = (0, 0, \dots, 1)$ .

Estos vectores son unitarios,  $\|\vec{u}_k\| = 1$ , y ortogonales dos a dos<sup>3</sup>,  $\vec{u}_i \vec{u}_j = \delta_{ij}$ , lo cual es lo mismo que decir que son ortonormales. Cualquier elemento  $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  se puede escribir como  $\vec{x} = x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + \dots + x_n \vec{u}_n$ . Por lo tanto el conjunto de vectores  $\{\vec{u}_i\}$ , con  $i \in \{1, \dots, n\}$ , constituye una base del espacio  $\mathbb{R}^n$ . A veces se escribe  $\hat{u}_i$  en lugar de  $\vec{u}_i$  para indicar que son unitarios. En física, la base de vectores ortonormales de  $\mathbb{R}^3$  suele denotarse por  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

<sup>1</sup>Esto implica que definimos en ese espacio la norma euclídea y la tomamos como distancia entre puntos, cosa que hacemos a continuación.

<sup>2</sup>Más adelante se dará una definición más general de distancia.

<sup>3</sup>El símbolo  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker. Toma el valor 0 si  $i \neq j$  y el valor 1 si  $i = j$ .

**Teorema 16** *Propiedades de la norma.*  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n, \forall a \in \mathbb{R}$ , se verifica:

- (a)  $\|\vec{x}\| \geq 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}; \quad \|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$ .
- (b)  $\|a\vec{x}\| = |a| \|\vec{x}\|$ .
- (c)  $\|\vec{x} - \vec{y}\| = \|\vec{y} - \vec{x}\|$ .
- (d)  $|\vec{x}\vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\|$ , (*desigualdad de Cauchy-Schwarz*).
- (e)  $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ , (*desigualdad triangular*).

*Demostración:* (a), (b) y (c) son triviales. La (d) está propuesta en un ejercicio. La (e) se sigue de la (d) puesto que

$$\begin{aligned} \|\vec{x} + \vec{y}\|^2 &= \sum_{k=1}^n (x_k + y_k)^2 = \sum_{k=1}^n (x_k^2 + y_k^2 + 2x_k y_k) = \\ &= \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\vec{x}\vec{y} \leq \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 + 2\|\vec{x}\| \|\vec{y}\| = (\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|)^2 \end{aligned}$$

Obsérvese que para  $n = 1$  se reduce a la desigualdad triangular del valor absoluto, porque para  $n = 1$  la definición de la norma coincide con la del valor absoluto de los números reales. Sustituyendo  $\vec{x}$  por  $\vec{x} - \vec{y}$ , e  $\vec{y}$  por  $\vec{y} - \vec{z}$ , podemos escribir la desigualdad triangular de otro modo que se usa con frecuencia:

$$\|\vec{x} - \vec{z}\| \leq \|\vec{x} - \vec{y}\| + \|\vec{y} - \vec{z}\|$$

Un espacio con las propiedades (a), (b) y (e) se llama *espacio normado*.  $\mathbb{R}^n$  es un espacio normado.

**Definición 32** *Un espacio normado,  $M$ , es un espacio vectorial sobre un cuerpo  $K$  que está dotado de una función con valores en  $\mathbb{R}$  (norma), que satisface las siguientes propiedades  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in M$  y  $\forall a \in K$ .*

- (a)  $\|\vec{x}\| \geq 0 \quad \forall \vec{x} \neq \vec{0}; \quad \|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$ .
- (b)  $\|a\vec{x}\| = |a| \|\vec{x}\|$ .
- (c)  $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ .

Los espacios normados son casos particulares de espacios métricos. Éstos últimos no son necesariamente espacios vectoriales y se definen a continuación.

**Definición 33** *Un espacio métrico,  $M$ , es un conjunto no vacío de objetos (puntos) dotado de una función  $d: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  (métrica del espacio), que satisface  $\forall x, y, z \in M$ :*

- (a)  $d(x, x) = 0$ .
- (b)  $d(x, y) > 0$  si  $x \neq y$ .
- (c)  $d(x, y) = d(y, x)$ .
- (d)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

La métrica  $d$  puede considerarse como la distancia entre puntos, con lo cual las condiciones anteriores se toman como la definición de distancia.

Es evidente que todo espacio normado es un espacio métrico, porque basta definir  $d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$ , y las propiedades de distancia se siguen de las propiedades de la norma. En general pueden definirse en  $\mathbb{R}^n$  otras distancias no asociadas a normas. La métrica de  $\mathbb{R}^n$  inducida por la norma se llama *métrica euclídea*. Cuando nos refiramos a  $\mathbb{R}^n$  (espacio euclídeo) se entenderá que su métrica es la euclídea mientras no se diga lo contrario.

Ejemplos de otras posibles métricas:

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|$$

$$d(\vec{x}, \vec{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|\}$$

## 2.3. Conjuntos abiertos y cerrados.

**Definición 34** Dados dos conjuntos  $A$  y  $B$ , tales que  $A \subset B$ , se define el complementario de  $A$  relativo a  $B$  como  $B - A = \{x \in B \mid x \notin A\} = C(A)$ .

En lo sucesivo, cuando hablemos del complementario de un conjunto  $S$  y lo denotemos por  $C(S)$ , entenderemos que se trata del conjunto complementario de  $S$  relativo a todo el espacio  $\mathbb{R}^n$  a menos que se diga lo contrario. Es decir, entenderemos que  $C(S) = \mathbb{R}^n - S$ .

**Definición 35** Sea  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  y sea  $r$  un número positivo dado. El conjunto de todos los puntos  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  tales que  $\|\vec{x} - \vec{a}\| < r$  se denomina  $n$ -bola abierta de radio  $r$  y centro  $\vec{a}$ . La designamos por  $B(\vec{a}, r)$  ó  $B(\vec{a})$ .

$$B(\vec{a}, r) = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\vec{x}, \vec{a}) < r\}$$

La bola  $B(\vec{a}, r)$  consta de todos los puntos cuya distancia a  $\vec{a}$  es menor que  $r$ . En una dimensión es un intervalo abierto, en dos es un disco circular, en tres es el interior de una esfera. En  $n$  dimensiones hablamos de  $n$ -bolas.

**Definición 36** Se dice que  $S \subset \mathbb{R}^n$  es un conjunto acotado si está contenido totalmente en una bola  $B(\vec{a}, r)$  para algún  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  y algún  $r > 0$ .

**Definición 37** Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$ .

- Un punto  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  es interior de  $S$  si existe alguna  $n$ -bola abierta  $B(\vec{a})$  contenida en  $S$ , es decir,  $B(\vec{a}) \subset S$ . El conjunto formado por todos los puntos interiores de  $S$  se denomina interior de  $S$  y suele denotarse por  $\text{int}(S)$  ó  $\overset{\circ}{S}$ .
- Un punto  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  es exterior a  $S$  si existe alguna  $n$ -bola abierta  $B(\vec{a})$  tal que  $B(\vec{a}) \cap S = \emptyset$ , o lo que es lo mismo, si  $B(\vec{a}) \subset C(S)$ .
- Un punto  $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$  es frontera de  $S$  si toda  $n$ -bola abierta  $B(\vec{a})$  contiene al menos un punto de  $S$  y al menos un punto de  $C(S)$ , o lo que es lo mismo, si  $B(\vec{a}) \not\subset S$  y  $B(\vec{a}) \cap S \neq \emptyset$ . El conjunto de todos los puntos que son frontera de  $S$  se llama frontera de  $S$  y se denota por  $\partial S$ .

**Definición 38** Un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  es abierto si, y sólo si,  $S = \text{int}(S)$ .

Esta definición no sólo es válida para  $\mathbb{R}^n$ , sino también para cualquier espacio métrico genérico, porque sólo la distancia inducida por la métrica interviene en la definición.

Una definición equivalente a la anterior es ésta: *un conjunto se dice abierto si ninguno de sus puntos frontera le pertenece.*

Un intervalo abierto de  $\mathbb{R}^1$ , tal como  $(0, 1)$ , es un conjunto abierto, pero cuando ese mismo intervalo lo consideramos como un subconjunto del plano, no es abierto. De hecho ningún subconjunto de  $\mathbb{R}^1$  puede ser abierto en  $\mathbb{R}^2$  (salvo el conjunto vacío) porque tales conjuntos no pueden contener una 2-bola. El conjunto vacío es trivialmente un conjunto abierto porque  $\emptyset = \text{int}(\emptyset)$ . El mismo espacio  $\mathbb{R}^n$  es también un conjunto abierto porque todos sus puntos son interiores.

El producto cartesiano de intervalos abiertos unidimensionales,  $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n)$ , es un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$  llamado intervalo abierto  $n$ -dimensional, y se suele designar por  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Definición 39** Un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  es cerrado si su complementario  $\mathbb{R}^n - S$  es abierto.

Una definición equivalente a la anterior es ésta: *un conjunto se dice cerrado si todos sus puntos frontera le pertenecen.*

El intervalo  $[a, b]$ , considerado como subconjunto de  $\mathbb{R}^1$ , es cerrado porque su complementario es abierto:  $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ . El producto cartesiano de intervalos cerrados unidimensionales,  $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ , es un conjunto cerrado de  $\mathbb{R}^n$  llamado intervalo cerrado  $n$ -dimensional, y se suele designar por  $[\vec{a}, \vec{b}]$ .

Obsérvese que, de acuerdo con esta definición, los conjuntos especiales  $\mathbb{R}^n$  y  $\emptyset$  son a la vez abiertos y cerrados, porque uno es el complementario del otro y previamente hemos demostrado que los dos son abiertos. Un conjunto puede no ser ni abierto ni cerrado, como por ejemplo el intervalo  $[0, 1)$ .

**Teorema 17** *La unión de una colección arbitraria de conjuntos abiertos es abierta.*

*Demostración:* Sea  $F$  una colección de conjuntos abiertos y sea  $S$  la unión de todos ellos, es decir,  $S = \bigcup_{A \in F} A$ . Supongamos que  $\vec{x} \in S$ , entonces  $\vec{x}$  debe estar en al menos uno de los conjuntos de la colección  $F$ , que podemos llamar  $A$ . Entonces  $\vec{x} \in A$ . Como  $A$  es abierto existe una  $n$ -bola abierta tal que  $B(\vec{x}) \subset A$ , lo cual implica que  $B(\vec{x}) \subset S$  y por lo tanto  $\vec{x}$  es un punto interior de  $S$ . Así vemos que todo punto de  $S$  es un punto interior a  $S$ , por lo tanto  $S$  es abierto y el teorema queda demostrado.

*Ejemplo:* consideremos la colección de intervalos abiertos dada por

$$F = \{(a, b) \subset \mathbb{R} \mid 0 < a < 1, 0 < b < 1, a < b\}.$$

Se trata de una colección infinita no numerable. Su unión es un conjunto abierto:

$$\bigcup_{A \in F} A = (0, 1).$$

El intervalo  $(0, 1)$  también se puede poner como la unión de una colección numerable de abiertos:

$$G = \{A_k\} = \left\{ \left( \frac{1}{k}, 1 \right) \mid k \in \mathbb{Z}^+, k \geq 2 \right\}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = (0, 1).$$

**Teorema 18** *La intersección de una colección finita de conjuntos abiertos es abierta.*

*Demostración:* Sea  $S = \bigcap_{k=1}^m A_k$ , y cada  $A_k$  un abierto. Si  $S = \emptyset$  no hay nada que demostrar porque el conjunto vacío es abierto. Si  $S \neq \emptyset$  tomemos un  $\vec{x} \in S$ . Entonces  $\vec{x} \in A_k$  para cada  $k = 1, 2, \dots, m$ , y por lo tanto existen  $m$   $n$ -bolas abiertas  $B(\vec{x}, r_k) \subset A_k$ . Sea  $r$  el menor de los  $m$  números positivos  $r_1, r_2, \dots, r_m$ . Entonces  $\vec{x} \in B(\vec{x}, r) \subset S$ , con lo cual deducimos que  $\vec{x}$  es un punto interior y por lo tanto  $S$  es abierto.

Es importante el requisito de que la colección sea finita, porque el teorema no es en general cierto para colecciones infinitas. Por ejemplo, la intersección de los infinitos intervalos abiertos de la forma  $(-1/n, 1/n)$  donde  $n \in \mathbb{Z}^+$  es el conjunto cuyo único elemento es el 0, y por lo tanto es un conjunto cerrado.

**Teorema 19** *La unión de una colección finita de conjuntos cerrados es cerrada, y la intersección de una colección arbitraria de conjuntos cerrados es cerrada.*

*Demostración:* Es inmediata, basta aplicar los teoremas 17 y 18 a los conjuntos complementarios, que son abiertos porque, dada una colección  $F$  arbitraria de conjuntos  $A$  se tiene:

$$C \left( \bigcap_{A \in F} A \right) = \bigcup_{A \in F} C(A) \quad \text{y} \quad C \left( \bigcup_{A \in F} A \right) = \bigcap_{A \in F} C(A)$$

Es decir, el complementario de la intersección es la unión de los complementarios, y el complementario de la unión es la intersección de los complementarios.

Obsérvese que la unión de una colección *arbitraria* de conjuntos cerrados no es necesariamente cerrada. Por ejemplo,  $G = \{[a, b] \mid 0 < a < 1, 0 < b < 1, a < b\}$  es una colección no numerable de cerrados, y su unión es un abierto:  $\bigcup_{A \in G} A = (0, 1)$ .

**Teorema 20** *Si  $A$  es abierto y  $B$  es cerrado, entonces  $A - B$  es abierto y  $B - A$  es cerrado.*

*Demostración:* Basta observar que  $A - B = A \cap (\mathbb{R}^n - B)$  es la intersección de dos conjuntos abiertos, y que  $B - A = B \cap (\mathbb{R}^n - A)$  es la intersección de dos conjuntos cerrados.

## 2.4. Puntos adherentes y puntos de acumulación.

**Definición 40** Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$ , y sea  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , aunque no necesariamente de  $S$ . Se dice que  $\vec{x}$  es *adherente* a  $S$  si toda  $n$ -bola  $B(\vec{x})$  contiene un punto de  $S$ , por lo menos. El conjunto de todos los puntos adherentes de  $S$  se llama *adherencia* ó *clausura* de  $S$  y se denota por  $\bar{S}$ .

Todo  $\vec{x} \in S$  es adherente a  $S$ , es decir,  $S \subset \bar{S}$ . Si  $S \subset \mathbb{R}$  está acotado superiormente entonces el  $\sup(S)$  es adherente a  $S$ . Si tomamos el intervalo abierto en  $\mathbb{R}^1$ ,  $S = (a, b)$ , entonces  $a$  y  $b$  son adherentes a  $S$ , pero no pertenecen a  $S$ . La adherencia de un conjunto es siempre un conjunto cerrado.

**Definición 41** Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$ , y sea  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ , aunque no necesariamente de  $S$ . Se dice que  $\vec{x}$  es un punto de *acumulación* de  $S$  si toda  $n$ -bola  $B(\vec{x})$  contiene por lo menos un punto de  $S$  *distinto* de  $\vec{x}$ . Si  $\vec{x} \in S$  y no es un punto de acumulación de  $S$ , entonces se denomina punto *aislado*. El conjunto de todos los puntos de acumulación de  $S$  se llama conjunto *derivado* de  $S$  y se denota por  $S'$ .

Nótese que  $\vec{x}$  es un punto de acumulación de  $S$  si, y sólo si,  $\vec{x}$  es adherente a  $S - \{\vec{x}\}$ . El conjunto de los números de la forma  $1/n$ , con  $n \in \mathbb{Z}^+$ , tiene al 0 como punto de acumulación. El conjunto de los números racionales tiene a cada número real como punto de acumulación. Cada punto del intervalo cerrado  $[a, b]$  es un punto de acumulación del intervalo abierto  $(a, b)$ .

Si  $\vec{x}$  es un punto de la frontera de  $S$ , entonces es un punto adherente a  $S$  y adherente a  $\mathbb{R}^n - S$ . Es decir, se cumple la relación  $\vec{x} \in \partial S \iff \vec{x} \in \bar{S}$ , y  $\vec{x} \in \overline{\mathbb{R}^n - S}$ , por lo tanto podemos escribir  $\partial S = \bar{S} \cap \overline{\mathbb{R}^n - S}$ , lo cual implica que  $\partial S$  es cerrado en  $\mathbb{R}^n$ , por ser la intersección de dos conjuntos cerrados.

**Teorema 21** Si  $\vec{x}$  es un punto de acumulación de  $S \subset \mathbb{R}^n$ , entonces toda bola  $B(\vec{x})$  contiene infinitos puntos de  $S$ .

*Demostración:* Si no fuese así tendría que existir una bola  $B(\vec{x})$  con un número finito de puntos de  $S$  distintos de  $\vec{x}$ . Podemos denotar esos puntos por  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ . Tomamos las distancias de estos puntos a  $\vec{x}$  y elegimos la menor de ellas, es decir,  $r = \min\{d(\vec{x}, \vec{a}_1), d(\vec{x}, \vec{a}_2), \dots, d(\vec{x}, \vec{a}_n)\}$ . Entonces la bola  $B(\vec{x}, r/2)$  no contendría ningún elemento de  $S$  distinto de  $\vec{x}$ , con lo cual deduciríamos que  $\vec{x}$  no es un punto de acumulación, en contradicción con la hipótesis de partida.

*Corolario:* Si  $S$  tiene un punto de acumulación entonces  $S$  es infinito. El recíproco, sin embargo, no es cierto, porque  $\mathbb{Z}$  es infinito y no tiene ningún punto de acumulación. Esto es debido a que  $\mathbb{Z}$  no es un conjunto acotado. Parece claro, sin embargo, que todo conjunto infinito contenido en una  $n$ -bola de radio finito (es decir, acotado) debe tener al menos un punto de acumulación. Éste es un resultado importante conocido como *Teorema de Bolzano–Weierstrass*.

**Teorema 22** (Bolzano–Weierstrass): Si un conjunto acotado  $S \subset \mathbb{R}^n$  contiene infinitos puntos, entonces existe por lo menos un punto de  $\mathbb{R}^n$  que es un punto de acumulación de  $S$ .

**Teorema 23** Un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  es cerrado si, y sólo si, contiene a todos sus puntos adherentes, es decir, si y sólo si  $\bar{S} \subset S$ .

*Demostración:* Sea  $S$  cerrado y  $\vec{x}$  un punto adherente a  $S$ . Si suponemos que  $\vec{x} \notin S$  llegaremos a una contradicción. En efecto, si  $\vec{x} \notin S$  entonces  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n - S$ , y puesto que  $\mathbb{R}^n - S$  es abierto contendrá alguna  $n$ -bola  $B(\vec{x})$ . Esto implica que  $B(\vec{x})$  no contiene puntos de  $S$ , lo cual está en contradicción con la hipótesis inicial de que  $\vec{x}$  un punto adherente a  $S$ .

Ahora debemos probar la implicación inversa, es decir, supongamos que  $S$  contiene a todos sus puntos adherentes y demostremos que de ello se sigue que  $S$  es cerrado. Sea  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n - S$ ,

esto implica que  $\vec{x} \notin S$  y, por lo tanto, que  $\vec{x}$  no es adherente a  $S$ . Existe, entonces, una  $n$ -bola  $B(\vec{x})$  que no tiene puntos de  $S$ , con lo cual  $B(\vec{x}) \subset \mathbb{R}^n - S$ . Concluimos así que  $\mathbb{R}^n - S$  es abierto y, en consecuencia,  $S$  es cerrado.

Para todo conjunto se verifica que  $S \subset \bar{S}$ , porque todo punto de  $S$  es adherente a  $S$ . El teorema anterior prueba que la inclusión opuesta,  $\bar{S} \subset S$ , se verifica si y sólo si  $S$  es cerrado. Por lo tanto podemos formular el siguiente teorema.

**Teorema 24** *Un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  es cerrado si, y sólo si,  $S = \bar{S}$ .*

Es evidente que para cualquier conjunto se verifica  $\bar{S} = S \cup S'$ . Por otro lado, el teorema 24 nos asegura que si  $S$  es cerrado entonces  $\bar{S} = S$ , lo cual nos lleva a reescribir la expresión anterior como  $S = S \cup S'$  para conjuntos cerrados, es decir,  $S' \subset S$ . Expresamos esto en el siguiente teorema.

**Teorema 25** *Un conjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$  es cerrado si, y sólo si, contiene a todos sus puntos de acumulación.*

Obsérvese que este teorema sólo garantiza que un conjunto cerrado contiene a todos sus puntos de acumulación, no que  $S = S'$ . Un contraejemplo sencillo es el conjunto  $S = [1, 2] \cup \{3\}$ , que contiene a todos sus puntos de acumulación pero es distinto de su conjunto derivado,  $S' = [1, 2]$ .

**Definición 42** *Sea  $M$  un espacio métrico y  $A \subset M$ ,  $S \subset M$ , dos subconjuntos. Se dice que  $A$  es denso en  $S$  si se verifica  $A \subset S \subset \bar{A}$ .*

*Ejemplos:*

- $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}$ , porque  $\bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ .
- $\mathbb{I}$  es denso en  $\mathbb{R}$ , porque  $\bar{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$ .

La definición matemática de densidad se corresponde en cierto modo con la idea intuitiva que uno se hace de ella cuando piensa en números:  $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}$  porque siempre es posible encontrar un número racional tan próximo como queramos a un número real dado. Lo mismo sucede con los números irracionales.

**Teorema 26** (*Encaje de Cantor*): *Sea  $\{Q_1, Q_2, \dots\}$  una colección numerable de conjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}^n$  tales que*

(a)  $Q_{k+1} \subset Q_k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

(b) *Cada  $Q_k$  es cerrado y  $Q_1$  acotado.*

Entonces  $S = \bigcap_{k=1}^{\infty} Q_k$  es cerrado y no vacío.

**Definición 43** *Una colección de conjuntos  $F$  se denomina recubrimiento de  $S \subset \mathbb{R}^n$  si  $S \subset \bigcup_{A \in F} A$ . Se dice también que  $F$  recubre a  $S$ . Si  $F$  es una colección de abiertos, entonces  $F$  se denomina recubrimiento abierto de  $S$ .*

**Teorema 27** (*Recubrimiento de Lindelöf*): *Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$  y  $F$  un recubrimiento abierto de  $S$ . Entonces existe una subcolección numerable de  $F$  que también recubre a  $S$ .*

**Teorema 28** (*Heine–Borel*): *Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$  cerrado y acotado, y sea  $F$  un recubrimiento abierto de  $S$ . Entonces existe una subcolección finita de  $F$  que también recubre a  $S$ .*

## 2.5. Conjuntos compactos.

**Definición 44** Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$ . Se dice que  $S$  es compacto si, y sólo si, cada recubrimiento abierto de  $S$  contiene una subcolección finita que recubre a  $S$ .

**Teorema 29** Para todo  $S \subset \mathbb{R}^n$  las tres afirmaciones siguientes son equivalentes:

- (a)  $S$  es compacto.
- (b)  $S$  es cerrado y acotado.
- (c) Todo subconjunto infinito de  $S$  tiene un punto de acumulación en  $S$ .

En general este teorema no se cumple para espacios métricos arbitrarios, pues en la demostración se utilizan propiedades particulares de  $\mathbb{R}^n$ . Sin embargo, la doble implicación  $S$  compacto  $\iff$   $S$  cerrado y acotado, sí es válida en un espacio métrico cualquiera.

## 2.6. Espacios topológicos.

**Definición 45** Un espacio topológico,  $X$ , es un conjunto de objetos junto a una colección de subconjuntos de  $X$  que denotaremos por  $Y = \{X_\alpha\}$ , siendo  $X_\alpha \subset X$ , tal que se satisfacen:

- (a)  $\emptyset \in Y$ ;  $X \in Y$ .
- (b) La unión de una subcolección arbitraria de  $Y$  pertenece a  $Y$ .
- (c) La intersección de una subcolección finita de  $Y$  pertenece a  $Y$ .

A los elementos de la colección de subconjuntos  $Y$  se les llama conjuntos abiertos.

Todo espacio métrico es también un espacio topológico, pues a partir de la métrica  $d(x, y)$  se puede dar un criterio para definir los conjuntos abiertos que satisfacen las propiedades de la definición anterior. Hemos visto todo esto en el caso particular de  $\mathbb{R}^n$ , que es un ejemplo de espacio topológico.

Cuando los conjuntos abiertos de un espacio topológico  $X$  se definen a partir de una distancia sobre  $X$ , tal como hemos hecho en el caso de  $\mathbb{R}^n$ , se dice que el espacio topológico es metrizable. La mayoría de los espacios topológicos que se estudian en el Análisis Matemático son metrizable, aunque existen espacios topológicos no metrizable que se estudian en Topología General.

## 2.7. Ejercicios.

1. Demostrar la desigualdad de Cauchy–Schwarz,

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) \quad \text{con } \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R} \text{ y } \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}.$$

La igualdad se verifica si, y sólo si,  $\exists x \in \mathbb{R}$  tal que  $a_k x + b_k = 0$  para todo  $k = 1, \dots, n$ .

2. Sean  $k$  y  $h$  aplicaciones definidas del siguiente modo:

$$\begin{aligned} k: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} & h: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\longrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| & (\vec{x}, \vec{y}) &\longrightarrow \max\{|x_i - y_i|\} \end{aligned}$$

Demostrar que  $k$  y  $h$  son distancias en  $\mathbb{R}^n$ . En el caso  $n = 2$  ¿cuáles son las bolas abiertas y cerradas de centro un punto arbitrario  $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$  y radio 1?

3. Demostrar que la aplicación:

$$\begin{aligned} p: A \times A &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases} \end{aligned}$$

es una distancia sobre  $A$  (distancia discreta) ¿Cuáles son las bolas abiertas y las bolas cerradas de centro un punto arbitrario  $x \in A$  y radio 1?

4. Sean  $A$  y  $B$  dos subconjuntos de  $\mathbb{R}^n$ . Demostrar que si  $A$  es abierto entonces el conjunto dado por  $C = \{c = a + b \mid a \in A, b \in B\}$  también es abierto.
5. Estudiar topológicamente los siguientes conjuntos:

$$\begin{array}{ll} a) A = \mathbb{Z} & d) D = \mathbb{Q} \\ b) B = (0, 1] & e) E = \mathbb{I} \\ c) C = \{(-1)^n(1 + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{Z}^+\} & f) F = \{\omega \in \mathbb{C} \mid |\omega| \in \mathbb{Z}^+\} \end{array}$$

Indicar si dichos conjuntos son abiertos, cerrados, o ninguna de las dos cosas. Indicar también si son compactos o no.

6. Estudia topológicamente los siguientes subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{array}{l} a) A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}. \\ b) B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = kx, k \in \mathbb{R}\}. \text{ Siendo } k \text{ un número real fijo.} \\ c) C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [0, 1] \text{ y } y \in (0, 1) \cap \mathbb{Q}\}. \\ d) D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{Z}^+, y \in [0, 1]\}. \end{array}$$

Indica si dichos conjuntos son abiertos, cerrados, o ninguna de las dos cosas. Indica también si son compactos o no.

7. Demostrar:

$$\begin{array}{ll} a) \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}. & c) C(\text{int}(A)) = \overline{C(A)}. \\ b) \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}. & d) C(\overline{A}) = \text{int}(C(A)). \end{array}$$

8. Demostrar:

$$\begin{array}{l} a) \partial A = \overline{A} \cap C(\text{int}(A)) = \overline{A} - \text{int}(A). \\ b) \overline{A} = \partial A \cup \text{int}(A). \\ c) A \text{ es cerrado si y sólo si } A = \text{int}(A) \cup \partial A. \end{array}$$

9. Demostrar que el intervalo abierto  $(0, 1)$  no es un compacto considerando la colección  $F$  de intervalos  $(1/n, 2/n)$  con  $n = 1, 2, 3, \dots$

10. Determina si la aplicación  $d(x, y) = |x^2 - y^2|$  es una distancia en  $\mathbb{R}$ . ¿Y en  $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ?
11. Estudia topológicamente el siguiente conjunto, argumentando tus conclusiones a partir de una representación esquemática del mismo:  $M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = (2^{1/n} + 3^{1/n})^2, n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ .  
(Nota: deja este ejercicio para cuando sepas calcular el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2}$ ).
12. Pon un ejemplo de un conjunto de números reales que no tenga máximo pero sí supremo. Pon otro ejemplo de un conjunto de número reales distinto de  $\mathbb{R}$ , que no tenga máximo, ni mínimo, ni supremo, ni ínfimo, y que sea denso en  $\mathbb{R}$ . Razona tus elecciones.
13. Da un ejemplo de subconjuntos  $A$  y  $B$  de un espacio métrico  $M$  tales que  $\text{int}(A) = \text{int}(B) = \emptyset$ , pero que  $\text{int}(A \cup B) = M$ .
14. Demuestra que el conjunto dado por  $S = \{z = |z|e^{i\theta} \in \mathbb{C} ; \theta \in \mathbb{Z}\}$  es denso en  $\mathbb{R}^2$ .

## Capítulo 3

# Límites y continuidad.

### 3.1. Introducción.

En este tema estudiaremos los límites de las sucesiones numéricas y de las funciones reales, así como la continuidad de estas últimas. Ambos conceptos están directamente relacionados con las dos operaciones que constituyen la base matemática esencial de la Física: la derivación y la integración de funciones. Por lo tanto, la importancia de los contenidos de este tema en el ámbito de la titulación es fundamental. Abordaremos en primer lugar los límites de las sucesiones numéricas, definiendo los conceptos de sucesión, subsucesión, sucesión convergente y sucesión no convergente. Seguidamente discutiremos algunas consecuencias de la convergencia, como la unicidad del límite, la relación de éste con la adherencia de la sucesión, los límites de subsucesiones y el álgebra de límites (incluyendo la parte relativa a las sucesiones divergentes a  $\pm\infty$  y los diferentes tipos de indeterminaciones que pueden aparecer:  $0/0$ ,  $\infty/\infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ , etc.). Finalizaremos esta parte del tema con la definición de sucesión Cauchy (aquella cuyos términos se acercan unos a otros tanto como se desee) y demostraremos la convergencia de este tipo de sucesiones en  $\mathbb{R}^n$ , lo que lo define como un espacio completo.

A continuación aplicaremos el concepto de límite a las funciones reales, introduciendo en primer lugar el límite de una función en un punto y relacionándolo con los límites de sucesiones a través de la sucesión de valores que toma la función para una sucesión definida dentro de su dominio. Ello nos permitirá, utilizando las propiedades de los límites de sucesiones, establecer de forma directa algunos aspectos básicos de los límites funcionales, como el álgebra de límites de funciones y las definiciones de límite direccional, límite asintótico y límite de una función vectorial.

Basándonos en la noción de límite de una función en un punto, seguidamente definiremos la propiedad de continuidad local de funciones (continuidad de una función en un punto). Se estudiarán el álgebra de las funciones continuas (incluyendo la composición de funciones) y la relación entre la continuidad o no de una función con las características topológicas de las imágenes y antiimágenes de conjuntos abiertos, cerrados y compactos por dicha función, lo que nos permitirá definir el concepto de homeomorfismo (una biyección continua cuya inversa es continua) y discutir sus propiedades más básicas. Finalizaremos esta parte del tema con dos teoremas fundamentales del análisis funcional, el teorema de Bolzano y el teorema del valor medio, que están directamente relacionados con la continuidad funcional y que son esenciales para la graficación de funciones y el estudio de propiedades como la derivabilidad y la integrabilidad.

La última sección de este tema se dedicará a la extensión de la noción de continuidad desde su carácter inicialmente puntual a conjuntos de puntos (continuidad uniforme). Se establecerán relaciones entre el carácter uniformemente continuo de una función y las características topológicas de su dominio, como el teorema de Heine y el teorema del punto fijo, ambos necesarios para el desarrollo de aspectos más avanzados del análisis matemático que el alumno estudiará en el futuro y para el desarrollo de aplicaciones prácticas basadas en el cálculo numérico. Finalmente, se discutirán las características de los diferentes tipos de discontinuidades que una función puede presentar.

Como ya hemos comentado y se verá en detalle en el siguiente tema, el concepto de límite es fundamental en el estudio de la Física, pues es básico para la definición de la derivada. Lo mismo ocurre con la continuidad de funciones, que como veremos más adelante es una condición necesaria para que sean derivables. No obstante, hay aspectos de la continuidad o divergencia de una función que tienen una influencia directa en Física. Un ejemplo son los efectos derivados resonancias, que se producen cuando una perturbación periódica actúa sobre un sistema con la frecuencia de vibración característica del mismo (frecuencia de resonancia), haciendo que la amplitud de sus oscilaciones diverja y pudiendo provocar su colapso (copa de vino que estalla, puente de Tacoma que se derrumba, etc.)

En la escuela secundaria el alumno se ha familiarizado ya con el concepto de límite tal como se introduce en el cálculo elemental, es decir, con el concepto de límite de una sucesión de números reales o límite de una función real de variable real. Aquí estudiaremos los límites en el marco más general de los espacios métricos. En lo que sigue, denotaremos un espacio métrico genérico por  $(S, d_S)$ , donde  $d_S$  es la métrica definida en  $S$ . Comenzamos por definir el concepto de función entre dos espacios métricos.

**Definición 46** Sean dos espacios métricos  $(S, d_S)$  y  $(T, d_T)$ . Una función  $f$  de  $S$  en  $T$  es una aplicación unívoca de los puntos de  $S$  en puntos de  $T$ . Se representa por  $f : S \rightarrow T$ . A cada punto  $x \in S$  se le asocia un punto de  $T$ , y sólo uno, que se representa por  $f(x)$ . Cuando  $S = \mathbb{R}^n$  y  $T = \mathbb{R}^m$  se suele escribir  $\vec{f}(\vec{x})$ . Al conjunto  $S$  se le llama dominio de  $f$ , y al conjunto de puntos  $\{f(x)\} \subset T$  se le llama recorrido de  $f$  (o conjunto imagen).

Ejemplos:

- (a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$   
 (b)  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$   
 (c)  $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \vec{f}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z)) = (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2).$

Las funciones  $\vec{f}(\vec{x})$  suelen representarse por  $(f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x}))$ . A los  $f_i$  se les llama componentes.

## 3.2. Sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy.

**Definición 47** Una sucesión de puntos en un espacio métrico  $(S, d_S)$  es una aplicación unívoca de  $\mathbb{Z}^+$  en  $S$ . Es decir, a cada número entero positivo  $n = 1, 2, \dots$  se le asigna un elemento de  $S$ , y sólo uno, que denotaremos por  $x_n$ . Denotaremos una sucesión genérica por  $\{x_n\}$ .

Ejemplo:  $n \rightarrow x_n = \frac{1}{n^2}.$

**Definición 48** Una sucesión  $\{x_n\} \subset (S, d_S)$  es convergente si existe un punto  $p \in S$  que satisfaga la siguiente condición:

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+ \mid d(x_n, p) < \epsilon \quad \forall n \geq N.$$

O lo que es lo mismo:

$$\forall B(p, \epsilon), \exists N \in \mathbb{Z}^+ \mid x_n \in B(p, \epsilon) \quad \forall n \geq N.$$

Se dice que  $\{x_n\}$  converge a  $p$  y se escribe  $x_n \rightarrow p$ , ó bien,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$ .

Si no existe un punto  $p$  que cumpla la propiedad anterior se dice que la sucesión es divergente, ó que no converge. Obsérvese que de la definición se sigue que  $x_n \rightarrow p$  si, y sólo si,  $d(x_n, p) \rightarrow 0$ . En otras palabras,  $\{x_n\}$  es convergente cuando, a medida que  $n$  crece, sus términos se acercan todo lo que uno quiera al límite  $p$ . La convergencia de la sucesión  $\{d(x_n - p)\}$  hacia 0 se realiza en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^1$ .

Ejemplos:

- (a) En  $\mathbb{R}^2$ ,  $\{(\frac{1}{n^2}, n^2)\}$  diverge. (c) En  $\mathbb{R}$ ,  $\{\frac{n^2+1}{n^2+n}\}$  converge a 1.  
 (b) En  $\mathbb{R}$ ,  $\{\frac{1}{n^2}\}$  converge a 0. (d) En  $(0, 1]$ ,  $\{\frac{1}{n^2}\}$  no converge.

Los ejemplos (b) y (d) sirven para ilustrar el hecho de que la convergencia de una sucesión depende tanto de ella misma como del espacio métrico en el que la consideremos.

Enunciamos a continuación de forma rápida unas cuantas definiciones y propiedades sencillas:

- En el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^1$ , una sucesión  $\{x_n\}$  se llama creciente si  $x_n \leq x_{n+1}$  para todo  $n$ . Si una sucesión creciente está acotada superiormente entonces converge hacia el supremo de su recorrido.
- Análogamente, una sucesión  $\{x_n\}$  se llama decreciente si  $x_n \geq x_{n+1}$  para todo  $n$ . Toda sucesión decreciente acotada inferiormente converge hacia el ínfimo de su recorrido.

- Las sucesiones crecientes o decrecientes se denominan *monótonas*. Es usual referirse a ellas como monótona creciente o monótona decreciente, según sea el caso.
- Si  $\{a_n\}$  y  $\{b_n\}$  son dos sucesiones reales que convergen a cero, entonces  $\{a_n + b_n\}$  también converge a cero.
- Si  $0 \leq b_n \leq a_n$  para todo  $n$  y  $\{a_n\}$  converge a cero, entonces  $\{b_n\}$  también converge a cero.

**Teorema 30** *Unicidad del límite. Una sucesión  $\{x_n\} \subset (S, d_S)$  puede converger a un punto de  $S$  a lo sumo.*

*Demostración:* Supongamos que  $x_n \rightarrow p$  y  $x_n \rightarrow q$ . Demostraremos que necesariamente  $p = q$ . Por la desigualdad triangular tenemos  $0 \leq d(p, q) \leq d(p, x_n) + d(x_n, q) \forall n$ . Tanto  $d(p, x_n)$  como  $d(x_n, q)$  tienden a cero, por lo tanto podemos afirmar que  $d(p, q) = 0$  y, como consecuencia,  $p = q$ . Si lo queremos razonar con más de detalle diríamos que, dado  $\epsilon > 0$ , podemos encontrar cierto  $N$  tal que  $d(p, x_n) \leq \epsilon/2$  y  $d(x_n, q) \leq \epsilon/2$  si  $n > N$ , por lo tanto tenemos  $0 \leq d(p, q) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$ . Deducimos así que  $0 \leq d(p, q) \leq 0 + \epsilon \forall \epsilon > 0$ . Ahora aplicamos el teorema 1 y concluimos que  $d(p, q) = 0$ , lo cual sólo puede suceder si  $p = q$ .

**Teorema 31** *Sea una sucesión  $\{x_n\} \subset (S, d_S)$  que converge a  $p$  y sea  $T = \{x_1, x_2, \dots\}$  el recorrido de  $\{x_n\}$ . Entonces:*

- (a)  $T$  está acotado.
- (b)  $p$  es un punto de adherencia de  $T$ .

*Demostración:*

- (a) Basándonos en la definición de convergencia, tomamos  $\epsilon = 1$  y buscamos un  $N$  tal que se cumple que  $x_n \in B(p, 1)$  para todo  $n \geq N$ . Como hay un número finito de términos de la sucesión anteriores a  $N$ , podemos encontrar un número positivo  $r$  tal que  $r > \max\{d(x_1, p), d(x_2, p), \dots, d(x_N, p), 1\}$ , y entonces podemos afirmar que todos los puntos de la sucesión están dentro de la bola de radio  $r$  centrada en  $p$ , es decir,  $x_n \in B(p, r) \forall n$ , con lo cual  $T$  está acotado.
- (b) De la definición de convergencia se sigue directamente que  $B(p, \epsilon)$  contiene algún punto de  $T$  por pequeño que sea  $\epsilon$ , por lo tanto  $p$  es adherente a  $T$ .

**Corolario:** En el caso de que  $T$  fuese infinito, toda bola  $B(p, \epsilon)$  contendría infinitos puntos de  $T$ , con lo cual  $p$  sería un punto de acumulación de  $T$ .

**Observación:** si  $T$  es finito, como sucede por ejemplo en la sucesión dada por  $\{x_n\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5, \dots\}$  ( $x_n = 5$  para  $n \geq 5$ ), puede ocurrir que en la bola  $B(p, \epsilon)$  sólo tengamos el propio punto  $p$ . El conjunto de puntos de una sucesión  $\{x_n\}$  es siempre infinito. No obstante, el conjunto de valores *distintos* que toman los infinitos términos  $x_n$  (es decir, su recorrido) puede ser finito. En el caso anterior ese recorrido es  $T = \{1, 2, 3, 4, 5, \}$ .

**Teorema 32** *Sea  $T \subset (S, d_S)$  y  $p$  un punto de  $S$  adherente a  $T$  (recuérdese que no es necesario que  $p \in T$ ). Entonces existe una sucesión  $\{x_n\} \subset T$  que converge a  $p$ .*

*Demostración:* Por ser  $p$  adherente a  $T$ , toda bola centrada en  $p$  contiene puntos de  $T$ . En concreto, podemos considerar una colección de de bolas centradas en  $p$  y de radio  $1/n$ , siendo  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Podemos asegurar entonces que para cada entero  $n \geq 1$  existe un punto  $x_n$  de  $T$  tal que  $d(p, x_n) \leq 1/n$ . Así construida, esta sucesión verifica que  $d(p, x_n) \rightarrow 0$ , por lo tanto la sucesión converge a  $p$ .

**Definición 49** *Dada una sucesión  $\{x_n\}$ , se define una subsucesión de ésta como otra sucesión dada por  $\{x_{k(n)}\}$ , donde  $k : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$  es una aplicación que preserva el orden, es decir, si  $m < n$  entonces  $k(m) < k(n)$ .*

*Ejemplo:* La sucesión  $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{2n}\right\}$  es una subsucesión de  $\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\} = \left\{\frac{1}{n}\right\}$ . La aplicación  $k$  estaría definida como  $k(n) = 2n$ .

**Teorema 33** Una sucesión  $\{x_n\} \subset (S, d_S)$  converge a  $p \in S$  si, y sólo si, cada subsucesión  $\{x_{k(n)}\}$  converge a también a  $p$ .

*Demostración:* Supongamos primero que  $x_n \rightarrow p$  y deduzcamos que toda subsucesión  $\{x_{k(n)}\}$  converge también a  $p$ . En efecto, por ser  $p$  el límite de  $\{x_n\}$  sabemos que para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $N$  tal que  $n \geq N$  implica  $d(x_n, p) < \epsilon$ . Por otro lado, como  $\{x_{k(n)}\}$  es una subsucesión de  $\{x_n\}$ , sea cual sea  $N$  siempre podremos encontrar otro entero  $M$  tal que  $k(n) \geq N$  si  $n \geq M$ . Concluimos entonces que para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $M$  tal que  $d(x_{k(n)}, p) < \epsilon$  si  $n \geq M$ , lo cual prueba que  $x_{k(n)} \rightarrow p$ . La implicación contraria se verifica trivialmente porque  $\{x_n\}$  es una subsucesión de sí misma.

En una sucesión no convergente pueden existir subsucesiones que sí converjan. Examínese, por ejemplo, la sucesión  $\{x_n\}$  dada por

$$x_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n}{n+1} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}, \quad \text{es decir} \quad \{x_n\} = \left\{1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \dots\right\}.$$

La subsucesión de los términos de índice impar tiende a cero, mientras que la los términos de índice par tiende a uno. Estos límites se denominan *límites de oscilación* de la sucesión  $\{x_n\}$ .

**Definición 50 (límites de oscilación)** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión de números reales. Se dice que  $\alpha$  (siendo  $\alpha \in \mathbb{R}$  ó  $\alpha = \pm\infty$ ) es un límite de oscilación de  $\{x_n\}$  si existe alguna subsucesión de  $\{x_n\}$  cuyo límite es  $\alpha$ .

En una sucesión convergente sus términos se aproximan al límite, y por lo tanto también se aproximan entre sí a medida que crece  $n$ . El siguiente teorema establece esto de modo formal.

**Teorema 34** Sea  $\{x_n\} \subset (S, d_S)$  una sucesión convergente en un espacio métrico. Entonces se cumple que:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{Z}^+ \mid d(x_n, x_m) < \epsilon \text{ si } n, m \geq N.$$

*Demostración:* Sea  $p$  el límite al que converge  $\{x_n\}$ . Sabemos que para cualquier  $\epsilon > 0$  podemos encontrar un  $N$  tal que  $d(x_n, p) < \epsilon/2$  si  $n \geq N$ . Si tanto  $n$  como  $m$  son mayores o iguales que  $N$  podemos aplicar la desigualdad triangular para obtener

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, p) + d(p, x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

**Definición 51 (Sucesión de Cauchy)** Una sucesión  $\{x_n\} \subset (S, d_S)$  de un espacio métrico se denomina *sucesión de Cauchy* si cumple la denominada *condición de Cauchy*:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{Z}^+ \mid d(x_n, x_m) < \epsilon \text{ si } n, m \geq N.$$

Obsérvese que  $\{1/n\} \subset (0, 1]$  es una sucesión de Cauchy, pero no converge en el espacio métrico en el que está definida:  $(0, 1]$ . Otro ejemplo: la sucesión de Cauchy  $\{(1 + \frac{1}{n})^n\} \subset \mathbb{Q}$  no converge en  $\mathbb{Q}$ .

Hemos visto que, en cualquier espacio métrico, toda sucesión convergente es de Cauchy. El recíproco no es cierto en general, pero sí es cierto en  $\mathbb{R}^n$ .

**Teorema 35** En el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  toda sucesión de Cauchy es convergente.

*Demostración:* Sea  $\{\vec{x}_n\} \subset \mathbb{R}^n$  una sucesión de Cauchy y sea  $T = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots\}$  su recorrido. Si  $T$  es finito todos los términos de la sucesión son iguales, salvo a lo sumo un número finito de ellos, lo cual significa que  $\{\vec{x}_n\}$  converge a ese valor común.

Supongamos ahora que  $T$  es infinito. Es además fácil ver que  $T$  está acotado, porque para  $\epsilon = 1$  podemos encontrar un  $N$  tal que  $n \geq N$  implica  $\|\vec{x}_n - \vec{x}_N\| < 1$ , lo cual significa que todos los puntos  $\vec{x}_n$  con  $n \geq N$  pertenecen a la bola de radio 1 y centro  $\vec{x}_N$ , por lo tanto podemos decir que  $T$  está contenido en una bola de radio  $1 + r$  y centro  $\vec{0}$ , donde  $r$  es el  $\max(\|\vec{x}_1\|, \dots, \|\vec{x}_N\|)$ . Por ser  $T$  infinito y acotado, el teorema de Bolzano–Weierstrass nos garantiza que admite un punto de acumulación  $\vec{p}$  en  $\mathbb{R}^n$ . Comprobemos que la sucesión  $\{\vec{x}_n\}$  converge a  $\vec{p}$ . En efecto, por satisfacer la condición de Cauchy sabemos que dado  $\epsilon > 0$  existe un  $N$  tal que  $\|\vec{x}_n - \vec{x}_m\| < \epsilon/2$  siempre que  $n \geq N$  y  $m \geq N$ . Por otro lado, por ser  $\vec{p}$  punto de acumulación, la bola  $B(\vec{p}, \epsilon/2)$  contiene necesariamente puntos  $\vec{x}_m$  con  $m \geq N$ . Por lo tanto, si  $n \geq N$  podemos escribir  $\|\vec{x}_n - \vec{p}\| \leq \|\vec{x}_n - \vec{x}_m\| + \|\vec{x}_m - \vec{p}\| \leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$ , lo cual termina la demostración.

### 3.3. Espacios métricos completos.

**Definición 52** Un espacio métrico  $(S, d)$  se dice completo si toda sucesión de Cauchy en  $S$  converge en  $S$ . Un subconjunto  $T$  de  $S$  es completo si el subespacio  $(T, d)$  es completo.

Tanto  $\mathbb{R}$  como  $\mathbb{R}^n$  son completos, pero no así  $\mathbb{Q}$ . La completitud resulta de utilidad para probar la convergencia de algunas sucesiones.

**Definición 53** Sea  $\{\vec{x}_n\} \subset S \subset \mathbb{R}^n$ . Se dice que  $\vec{x}_n \rightarrow \infty$  si  $\forall k > 0 \exists N \in \mathbb{Z}^+ \mid \forall n \geq N \|\vec{x}_n\| > k$ . Se dice que esta sucesión es divergente y que diverge a  $\infty$ , ó bien que tiene límite infinito.

*Observación:* no especificamos si la sucesión tiende a  $+\infty$  ó a  $-\infty$ , porque eso sólo tendría sentido en  $\mathbb{R}^1$ .

**Teorema 36** Sean  $\{\vec{x}_n\} \subset S \subset \mathbb{R}^n$  e  $\{\vec{y}_n\} \subset S \subset \mathbb{R}^n$  dos sucesiones convergentes tales que  $\vec{x}_n \rightarrow \vec{p}$  e  $\vec{y}_n \rightarrow \vec{q}$ . Entonces las sucesiones  $\{\vec{x}_n + \vec{y}_n\}$  y  $\{\vec{x}_n \vec{y}_n\}$  son convergentes y sus límites son, respectivamente, la suma y el producto de los límites.

*Demostración:* Para ver que el límite de la sucesión  $\{\vec{x}_n + \vec{y}_n\}$  es la suma de los límites usamos la desigualdad triangular del siguiente modo:

$$\|\vec{x}_n + \vec{y}_n - (\vec{p} + \vec{q})\| \leq \|\vec{x}_n - \vec{p}\| + \|\vec{y}_n - \vec{q}\|$$

Para ver que  $\{\vec{x}_n \vec{y}_n\}$  converge al producto de los límites utilizamos la desigualdad triangular y luego la de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \|\vec{x}_n \vec{y}_n - \vec{p} \vec{q}\| &= \|\vec{x}_n \vec{y}_n - \vec{x}_n \vec{q} + \vec{x}_n \vec{q} - \vec{p} \vec{q}\| = \|\vec{x}_n(\vec{y}_n - \vec{q}) + \vec{q}(\vec{x}_n - \vec{p})\| \leq \\ &\leq \|\vec{x}_n\| \|\vec{y}_n - \vec{q}\| + \|\vec{q}\| \|\vec{x}_n - \vec{p}\| \leq \|\vec{x}_n\| \|\vec{y}_n - \vec{q}\| + \|\vec{q}\| \|\vec{x}_n - \vec{p}\| \end{aligned}$$

Poco se puede decir en general sobre el producto y suma de sucesiones divergentes.

- Si  $x_n \rightarrow \infty$  e  $y_n \rightarrow \infty$ , entonces  $x_n + y_n \rightarrow \infty$  y  $x_n y_n \rightarrow \infty$ . Pero si  $x_n \rightarrow -\infty$  e  $y_n \rightarrow \infty$  nada podemos decir en general sobre la sucesión  $x_n + y_n$ , tenemos una indeterminación del tipo  $\infty - \infty$ .
- Si  $x_n \rightarrow p$  e  $y_n \rightarrow \infty$ , entonces  $x_n y_n \rightarrow \infty$  si  $p > 0$  y  $x_n y_n \rightarrow -\infty$  si  $p < 0$ . Si  $p = 0$  tendríamos una indeterminación del tipo  $0 \cdot \infty$ .
- En  $\mathbb{R}^1$ ,  $x_n^{y_n} \rightarrow p^q$  si  $x_n \rightarrow p$  e  $y_n \rightarrow q$ , siendo  $p \neq 0$  ó  $q \neq 0$ . En el caso de que  $p = q = 0$  tendríamos una indeterminación del tipo  $0^0$ . Si una de las dos sucesiones tiende a  $\infty$ , en general el límite de  $x_n^{y_n}$  será también  $\infty$ , pero hay dos casos especiales que dan lugar a indeterminaciones:  $\infty^0$  y  $1^\infty$ .

**Teorema 37** Sea  $\{x_n\} \subset S \subset \mathbb{R}$  una sucesión tal que  $x_n \neq 0$  para todo  $n$  y que converge a  $p \neq 0$ . Entonces la sucesión  $\{1/x_n\}$  es convergente y converge hacia  $1/p$ .

*Demostración:*

$$\left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{p} \right| = \left| \frac{p - x_n}{px_n} \right| = \frac{|x_n - p|}{|x_n||p|}$$

Como  $|x_n|$  está acotado y  $|x_n - p| \rightarrow 0$ , tenemos el teorema demostrado.

El límite de una sucesión cociente de otras dos,  $x_n/y_n$  es:

- 0 si  $x_n \rightarrow p$  e  $y_n \rightarrow \pm\infty$
- $\pm\infty$  si  $x_n \rightarrow p \neq 0$  e  $y_n \rightarrow 0$ , ó bien si  $x_n \rightarrow \pm\infty$  e  $y_n \rightarrow p \neq 0$ .
- Indeterminación del tipo  $0/0$  si  $x_n \rightarrow 0$  e  $y_n \rightarrow 0$
- Indeterminación del tipo  $\infty/\infty$  si  $x_n \rightarrow \pm\infty$  e  $y_n \rightarrow \pm\infty$

### 3.4. Funciones y límites de funciones.

**Definición 54** Sean  $(S, d_S)$  y  $(T, d_T)$  dos espacios métricos. Sea una función  $f : S \rightarrow T$ . Si  $p$  es un punto de acumulación de  $S$  (puede ser que  $p \notin S$ ) y si  $b \in T$ , la notación

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$$

significa que para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $d_T(f(x), b) < \epsilon$  siempre que  $x \in S$ ,  $x \neq p$ , y  $d_S(x, p) < \delta$ .

En términos de bolas diríamos que para toda bola  $B_T(b)$  existe una bola  $B_S(p)$  tal que  $f(x) \in B_T(b)$  siempre que  $x \in B_S(p)$ ,  $x \neq p$ .

Esto significa que  $f(x)$  se puede acercar al límite  $b$  tanto como queramos siempre que  $x$  esté lo suficientemente próximo a  $p$ . Éste último tiene que ser un punto de acumulación de  $S$  para que tenga sentido considerar puntos arbitrariamente próximos a él, sin embargo no es necesario que  $p$  pertenezca a  $S$  ni que  $b$  pertenezca a la imagen de la función  $f$ .

Consideremos, por ejemplo, la función real definida en el plano como  $f(x, y) = \frac{2x^2(y+1) + y^2}{2x^2 + y^2}$ , y demostremos que tiene por límite 1 cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ , a pesar de no estar definida en el punto  $(0, 0)$ . En efecto, las distancias (euclídeas) a considerar son

$$d((x, y), (0, 0)) = \|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$d(f(x, y), 1) = |f(x, y) - 1| = \frac{|2x^2y + 2x^2 + y^2 - 2x^2 - y^2|}{|2x^2 + y^2|} = \frac{2x^2}{2x^2 + y^2} |y| \leq |y|$$

Entonces, dado  $\epsilon > 0$  nos basta tomar  $\delta = \epsilon$  para asegurar que

$$\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \implies |f(x, y) - 1| \leq |y| < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \epsilon.$$

**Teorema 38** Sean  $(S, d_S)$  y  $(T, d_T)$  dos espacios métricos y  $f : S \rightarrow T$ . Sea  $p$  un punto de acumulación de  $S$  y sea  $b \in T$ . Entonces

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b \iff \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = b \quad \forall \{x_n\} \subset S - \{p\} \mid x_n \rightarrow p$$

**Corolario:** Una función no puede tener dos límites diferentes cuando  $x \rightarrow p$ . Esto se deduce a partir del teorema anterior y de la unicidad del límite de una sucesión.

**Teorema 39** Algunas propiedades de los límites de funciones. Sea  $S \subset \mathbb{R}^n$  y dos funciones  $\vec{f}: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $\vec{g}: S \rightarrow \mathbb{R}^m$ , tales que

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{p}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{a} \qquad \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{p}} \vec{g}(\vec{x}) = \vec{b}$$

y  $\lambda \in \mathbb{R}$  cualquiera, entonces se tiene:

$$\begin{aligned} \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{p}} [\vec{f}(\vec{x}) + \vec{g}(\vec{x})] &= \vec{a} + \vec{b} & \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{p}} \lambda \vec{f}(\vec{x}) &= \lambda \vec{a} \\ \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{p}} [\vec{f}(\vec{x})] [\vec{g}(\vec{x})] &= \vec{a} \cdot \vec{b} & \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{p}} \|\vec{f}(\vec{x})\| &= \|\vec{a}\| \end{aligned}$$

**Definición 55** Dada  $f: S \subset \mathbb{R} \rightarrow T \subset \mathbb{R}$ , definimos los límites por la derecha y por la izquierda como:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = b &\iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } |f(x) - b| < \epsilon \text{ si } 0 < x - p < \delta \\ \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = b &\iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } |f(x) - b| < \epsilon \text{ si } 0 < p - x < \delta \end{aligned}$$

En  $\mathbb{R}^n$  podemos elegir muchas “direcciones de acercamiento” diferentes a un punto dado  $p$ . Resulta así natural definir los límites direccionales a lo largo de rectas que pasan por  $p$ , e incluso los límites a lo largo de curvas. Si existe el  $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{p}} \vec{f}(\vec{x})$  entonces todos los límites direccionales a través de rectas que pasan por ese punto coinciden, pero el recíproco no es cierto en general. Para calcular el límite a través de una curva resulta conveniente escribir ésta última en su forma paramétrica. En el plano, por ejemplo, tendríamos la curva  $(x_1(t), x_2(t))$  y el punto  $\vec{p} = (x_1(t_0), x_2(t_0))$ , de modo que el límite sería:

$$\lim_{(x_1(t), x_2(t)) \rightarrow \vec{p}} \vec{f}(\vec{x}) = b \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } \|\vec{f}(\vec{x}) - \vec{b}\| < \epsilon \text{ si } |t - t_0| < \delta$$

También podemos definir límites reiterados del siguiente modo (denotamos  $\vec{x} = (x_1, x_2)$  y  $\vec{p} = (p_1, p_2)$ , restringiéndonos al caso de dos dimensiones. La generalización a espacios de mayor dimensión es obvia.)

$$\lim_{x_1 \rightarrow p_1} \underbrace{\left[ \lim_{x_2 \rightarrow p_2} f(\vec{x}) \right]}_{\varphi(x_1)} = \lim_{x_1 \rightarrow p_1} \varphi(x_1), \qquad \lim_{x_2 \rightarrow p_2} \underbrace{\left[ \lim_{x_1 \rightarrow p_1} f(\vec{x}) \right]}_{\psi(x_2)} = \lim_{x_2 \rightarrow p_2} \psi(x_2)$$

Si existen los límites reiterados de una función en un punto, es necesario que éstos coincidan para que exista el límite de la función en dicho punto. Sin embargo, no es una condición suficiente, es decir, de la coincidencia de los límites reiterados no podemos concluir la existencia del límite. Por otro lado, una función puede tener límite en un punto aún cuando no existan las funciones límite  $\varphi$  y  $\psi$ . El siguiente ejemplo lo pone de manifiesto.

$$f(x, y) = \begin{cases} +y, & \text{si } x \geq 0 \\ -y, & \text{si } x < 0 \end{cases}, \qquad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0,$$

$$\text{pero } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x, y) = +y \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x, y) = -y \implies \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$$

Puede ocurrir que los límites direccionales calculados a través de rectas coincidan pero que la función carezca de límite. Considérese por ejemplo la función definida en el plano como  $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 - y}$ , y calculemos los límites direccionales en  $(x, y) = (0, 0)$  a través de rectas que pasan por el origen, es decir, rectas del tipo  $y = ax$  y también la recta  $x = 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, ax) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 - ax} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x - a} = 0, \qquad \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{-y} = 0$$

Sin embargo, esta función no tiene límite en el origen porque si lo calculamos siguiendo la curva  $y = x^2 - x^3$  obtenemos un valor distinto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, x^2 - x^3) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2 - (x^2 - x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^3} = 1.$$

Veamos otro ejemplo más. Consideremos la función

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } y \neq x^2 \\ 1, & \text{si } y = x^2 \end{cases}$$

Todos los límites direccionales en el origen coinciden y son iguales a cero, pero el límite calculado a través de la parábola  $y = x^2$  es 1, por lo tanto esa función no tiene límite cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

**Definición 56** Dada  $f : S \subset \mathbb{R} \rightarrow T \subset \mathbb{R}$ , definimos los límites asintóticos como:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \iff \forall \epsilon > 0 \exists k > 0 \text{ tal que } |f(x) - b| < \epsilon \text{ si } x > k$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \iff \forall \epsilon > 0 \exists k > 0 \text{ tal que } |f(x) - b| < \epsilon \text{ si } x < -k$$

**Teorema 40** Sea  $f : S \subset \mathbb{R}^n \rightarrow T \subset \mathbb{R}^m$ . Entonces

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{b} \iff \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} f_j(\vec{x}) = b_j \quad \forall j = 1, \dots, n$$

### 3.5. Funciones continuas.

**Definición 57** Sean  $(S, d_S)$  y  $(T, d_T)$  dos espacios métricos y  $f : S \rightarrow T$ . Se dice que  $f$  es continua en  $p \in S$  si para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $d_T(f(x), f(p)) < \epsilon$  siempre que  $d_S(x, p) < \delta$ .

En términos de bolas diríamos que  $f$  es continua en  $p \in S$  si para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $f(x) \in B_T(f(p), \epsilon)$  siempre que  $x \in B_S(p, \delta)$ .

Si  $f$  es continua en todos los puntos de un conjunto  $A \subset S$ , se dice que  $f$  es continua en  $A$ .

La continuidad de una función  $f$  en el punto  $p$  nos asegura que puntos cercanos a  $p$  se aplican por medio de  $f$  en puntos cercanos a  $f(p)$ . Si  $p$  es un punto de acumulación<sup>1</sup> la definición de continuidad implica que

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p).$$

Si  $p$  es un punto aislado de  $S$ , entonces toda función definida en  $p$  será continua en  $p$ , puesto que para  $\delta$  suficientemente pequeño el único punto que satisface  $d_S(x, p) < \delta$  es el propio  $p$ , y se tiene obviamente que  $d_T(f(p), f(p)) = 0$ .

La continuidad así definida es una propiedad local, es decir, depende del comportamiento de  $f$  en las proximidades del punto  $p$ . Estudiaremos más adelante la continuidad desde un punto de vista global.

**Teorema 41** Sean  $(S, d_S)$  y  $(T, d_T)$  dos espacios métricos y  $f : S \rightarrow T$ . Se dice que  $f$  es continua en  $p \in S$  si, y sólo si, para cada sucesión  $\{x_n\} \subset S$  convergente a  $p$ , la sucesión  $\{f(x_n)\} \subset T$  converge a  $f(p)$ .

$$f \text{ continua en } p \iff \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(p)$$

**Teorema 42** Sean los espacios métricos  $(S, d_S)$ ,  $(T, d_T)$  y  $(V, d_V)$ . Sean las funciones  $f : S \rightarrow T$ , y  $g : f(S) \subset T \rightarrow V$ . Consideremos la función compuesta  $h : S \rightarrow V$  definida como  $h(x) = g[f(x)]$  para  $x \in S$ . Entonces si  $f$  es continua en  $p$ , y  $g$  es continua en  $f(p)$ , se tiene que  $h$  es continua en  $p$ .

<sup>1</sup>Se necesita que  $p$  sea un punto de acumulación para poder acercarnos todo lo que queramos a él a través de los puntos de  $S$ , y poder así utilizar el concepto de límite.

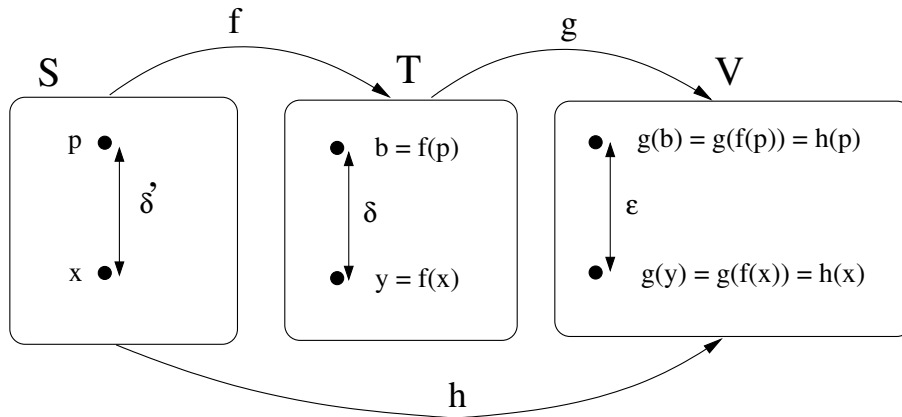


Figura 3.1: Esquema de composición de funciones.

*Demostración:* Sea  $b = f(p)$ . Por la continuidad de  $g$  en  $b$ , para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $d_V(g(y), g(b)) < \epsilon$  siempre que  $d_T(y, b) < \delta$ . Por otro lado, por ser  $f$  continua en  $p$ , para este  $\delta$  existe un  $\delta' > 0$  tal que  $d_T(f(x), f(p)) < \delta$  siempre que  $d_S(x, p) < \delta'$ . Combinamos estas dos desigualdades, teniendo en cuenta que  $y = f(x)$  y  $b = f(p)$ , para concluir que para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta' > 0$  tal que  $d_V(h(x), h(p)) < \epsilon$  siempre que  $d_S(x, p) < \delta'$ , lo cual implica que  $h$  es continua en  $p$ .

Podemos esquematizar la demostración en  $\mathbb{R}$  usando la distancia euclídea, para que quede más claro (véase la figura 3.1):

Para todo  $\epsilon > 0$  podemos encontrar un  $\delta > 0$  tal que  $|y - b| < \delta \implies |g(y) - g(b)| < \epsilon$ , es decir  $|h(x) - h(p)| < \epsilon$ . Por otro lado, para ese  $\delta > 0$  podemos encontrar un  $\delta' > 0$  tal que  $|x - p| < \delta' \implies |f(x) - f(p)| < \delta$ , es decir  $|y - b| < \delta$ . Combinando las dos afirmaciones previas podemos entonces asegurar que para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta' > 0$  tal que  $|h(x) - h(p)| < \epsilon$  si  $|x - p| < \delta'$ , y el teorema queda demostrado. En símbolos tendríamos:

$$\text{Por ser } g \text{ continua: } \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que } |y - b| < \delta \implies \begin{cases} |g(y) - g(b)| < \epsilon \\ |h(x) - h(p)| < \epsilon \end{cases}$$

$$\text{Por ser } f \text{ continua: } \forall \delta > 0 \exists \delta' > 0 \text{ tal que } |x - p| < \delta' \implies \begin{cases} |f(x) - f(p)| < \delta \\ |y - b| < \delta \end{cases}$$

$$\text{Por lo tanto: } \forall \epsilon > 0 \exists \delta' > 0 \text{ tal que } |x - p| < \delta' \implies |y - b| < \delta \implies |h(x) - h(p)| < \epsilon$$

Es decir,  $h$  es también continua.

*Ejemplo:* tomemos las funciones  $f(x) = \cos(x)$  y  $g(x) = x^2$ . Tanto  $f$  como  $g$  son continuas en todo  $\mathbb{R}$ , por lo tanto podemos afirmar que las funciones compuestas  $\cos^2(x)$  y  $\cos(x^2)$  son continuas también.

**Teorema 43** Sean  $S \subset \mathbb{R}^n$  y  $T \subset \mathbb{R}^m$ , y sean  $\vec{f} : S \rightarrow T$  y  $\vec{g} : S \rightarrow T$  dos funciones continuas en  $\vec{p} \in S$ . Entonces también son continuas en  $\vec{p}$  las siguientes funciones:  $\vec{f} + \vec{g}$ ,  $\lambda \vec{f}$ ,  $\vec{f} \cdot \vec{g}$ ,  $\|\vec{f}\|$ ,  $\|\vec{g}\|$ , siendo  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Además, si  $n = m = 1$  entonces  $f/g$  también es continua siempre que  $g(p) \neq 0$ , y  $1/f$  es continua siempre que  $f(p) \neq 0$ .

En el caso de funciones reales de variable real, dos funciones continuas en todo  $\mathbb{R}$  son la función constante,  $f(x) = c \forall x \in \mathbb{R}$ , y la función identidad,  $f(x) = x \forall x \in \mathbb{R}$ . Del teorema anterior se deduce inmediatamente que cualquier polinomio,  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , también es una función continua.

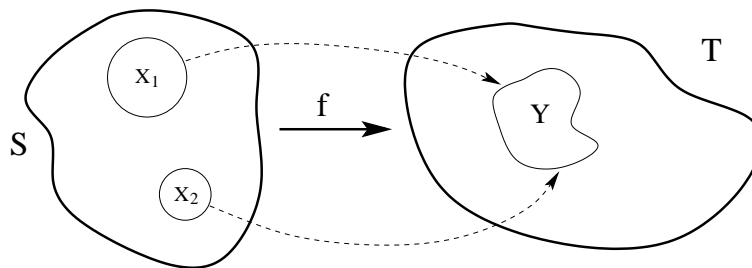


Figura 3.2: En este ejemplo tenemos  $Y = f(X_1)$ . Sin embargo  $X_1 \neq f^{-1}(Y)$ , porque  $f^{-1}(Y) = X_1 \cup X_2$ .

La función  $1/f(x)$  también es continua excepto en las raíces de  $f(x)$ . Las funciones elementales,  $e^x$ ,  $\log x$ ,  $\sen x$ ,  $\cos x$ ,  $\sinh x$ ,  $\cosh x$ , etc. son funciones continuas en todos los puntos en que están definidas. Por eso hacemos, por ejemplo,  $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^{\lim_{x \rightarrow 0} x} = e^0 = 1$ .

### 3.6. Continuidad y antiimágenes de conjuntos abiertos y cerrados.

**Definición 58** Sea  $f : S \rightarrow T$ . Dado  $Y \subset T$ , la antiimagen de  $Y$  por  $f$ , designada por  $f^{-1}(Y)$ , se define como el mayor de los subconjuntos de  $S$  que se aplica en  $Y$  por medio de  $f$ , es decir:

$$f^{-1}(Y) = \{x \in S \mid f(x) \in Y\}$$

Nótese que esta definición es útil incluso aunque no exista la función inversa<sup>2</sup> de  $f$ . Si  $f$  admite función inversa  $f^{-1}$ , es decir, si es uno a uno, entonces la antiimagen de  $Y$  por medio de  $f$  coincide con la imagen directa de  $Y$  por medio de  $f^{-1}$ , es decir, con  $f^{-1}(Y)$ . Además, se verifica que  $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$  si  $A \subset B \subset T$ .

**Teorema 44** Sea  $f : S \rightarrow T$ . Si  $X \subset S$  e  $Y \subset T$ , se tiene lo siguiente:

- (a) Si  $X = f^{-1}(Y)$ , entonces  $f(X) \subset Y$ , ó lo que es lo mismo,  $f[f^{-1}(Y)] \subset Y$ .
- (b) Si  $Y = f(X)$ , entonces  $X \subset f^{-1}(Y)$ , ó lo que es lo mismo,  $X \subset f^{-1}[f(X)]$ .

La demostración es inmediata porque basta poner directamente la definición de los símbolos  $f^{-1}(Y)$  y  $f(X)$ . En general no es posible decir que  $Y = f(X)$  implica  $X = f^{-1}(Y)$  (obsérvese el contraejemplo que muestra la figura 3.2). Por otro lado, ten en cuenta que de la condición  $X = f^{-1}(Y)$  no se puede deducir que  $f[f^{-1}(Y)] = Y$ , porque no todo punto de  $Y$  es necesariamente imagen de algún punto de  $X$ .

Además se cumple que  $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$  para todos los subconjuntos  $A$  y  $B$  de  $T$ .

**Teorema 45** Sea  $f : (S, d_S) \rightarrow (T, d_T)$ , entonces  $f$  es continua en  $S$  si, y sólo si, para cada conjunto abierto  $Y \subset T$ , la antiimagen  $f^{-1}(Y) \subset S$  es abierta en  $S$ .

*Demostración:* Sea  $f$  continua en  $S$ , sea  $Y$  un abierto de  $T$ , y sea  $p$  un punto de  $f^{-1}(Y)$ . Probaremos que  $p$  es interior a  $f^{-1}(Y)$ . En efecto, sea  $y = f(p)$ , como  $Y$  es abierto se cumple que  $B_T(y, \epsilon) \subset Y$  para un cierto  $\epsilon > 0$ . Por otro lado, como  $f$  es continua en  $p$ , podemos asegurar que para ese  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $f(B_S(p, \delta)) \subset B_T(y, \epsilon)$ , lo cual implica necesariamente que  $B_S(p, \delta) \subset f^{-1}(Y)$ , y por lo tanto  $f^{-1}(Y)$  es abierto

<sup>2</sup>Si no existe función inversa, la notación  $f^{-1}$  podría parecer confusa o ambigua. Considérese por ejemplo la función definida en toda la recta real como  $f(x) = 1$ . No tiene inversa, pero  $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{R}$ .

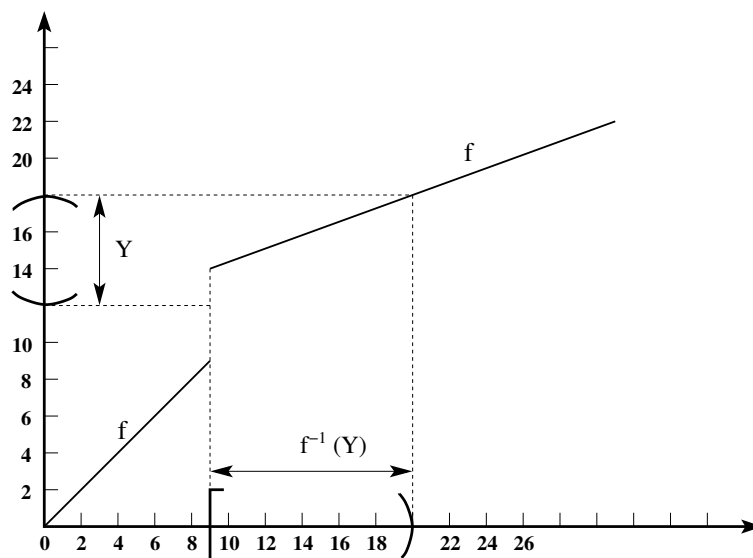


Figura 3.3: La función definida como  $f(x) = x$  si  $x < 9$ , y  $f(x) = (4x + 118)/11$  si  $x \geq 9$ , no es continua en  $x = 9$ . La antiimagen del intervalo abierto  $Y = (12, 18)$  es el intervalo  $f^{-1}(Y) = [9, 20)$ , que no es abierto.

Podemos razonarlo con un poco más de detalle, recordando que para cualesquiera conjuntos  $A$  y  $B$  se verifica  $f(A) \subset B \implies f^{-1}[f(A)] \subset f^{-1}(B)$ , (nota<sup>3</sup>), de modo que

$$\underbrace{B_S(p, \delta) \subset f^{-1}[f(B_S(p, \delta))]}_{X \subset f^{-1}[f(X)]} \subset f^{-1}[B_T(y, \epsilon)] \subset f^{-1}(Y),$$

de donde se deduce que  $p$  es un punto interior a  $f^{-1}(Y)$ .

Recíprocamente, supongamos que  $f^{-1}(Y)$  es abierto en  $S$  para todo subconjunto abierto  $Y$  de  $T$  y probemos que  $f$  es continua en  $p$ . Elijamos  $p$  en  $S$  y sea  $y = f(p)$ . Para todo  $\epsilon > 0$  la bola  $B_T(y, \epsilon)$  es un conjunto abierto en  $T$ , lo cual implica que  $f^{-1}(B_T(y, \epsilon))$  es abierto en  $S$ . Ahora bien, puesto que  $p \in f^{-1}(B_T(y, \epsilon))$ , que es abierto, podemos afirmar que existe un  $\delta > 0$  tal que  $B_S(p, \delta) \subset f^{-1}(B_T(y, \epsilon))$ , de donde se deduce que  $f(B_S(p, \delta)) \subset B_T(y, \epsilon)$ , lo cual implica a su vez que  $f$  es continua<sup>4</sup> en  $p$ .

Véanse las figuras 3.3 y 3.4 para una ilustración gráfica.

**Teorema 46** Sea  $f : (S, d_S) \rightarrow (T, d_T)$ , entonces  $f$  es continua en  $S$  si, y sólo si, para cada conjunto cerrado  $Y \subset T$ , la antiimagen  $f^{-1}(Y) \subset S$  es cerrada en  $S$ .

*Demostración:* Si  $Y$  es cerrado en  $T$ , entonces  $T - Y$  es abierto en  $T$  y, aplicando el teorema anterior, deducimos que  $f^{-1}(T - Y)$  es abierto en  $S$ . Ahora bien, como  $f^{-1}(T - Y) = S - f^{-1}(Y)$ , concluimos que  $S - f^{-1}(Y)$  es también abierto y, por lo tanto,  $f^{-1}(Y)$  es cerrado en  $S$ .

Conviene recalcar que la imagen de un abierto por medio de una función continua no es necesariamente abierta. Un contraejemplo es el caso de las funciones constantes que aplican todo  $S$  en un único punto de  $\mathbb{R}^1$ . La función  $f(x) = \text{sen}(x)$ , por ejemplo, lleva el intervalo abierto  $(0, 2\pi)$  en el intervalo cerrado  $[-1, 1]$ . Análogamente, la imagen de un conjunto cerrado por medio de una aplicación continua no es necesariamente cerrada. Por ejemplo, la función real  $f(x) = \text{arctan}(x)$  aplica  $\mathbb{R}^1$  en el intervalo  $(-\pi/2, +\pi/2)$ .

<sup>3</sup>Es decir,  $f(B_S(p, \delta)) \subset B_T(y, \epsilon) \implies f^{-1}[f(B_S(p, \delta))] \subset f^{-1}[B_T(y, \epsilon)]$ .

<sup>4</sup>Fíjate que hemos llegado a la conclusión de que para todo  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $f(x) \in B_T(f(p), \epsilon)$  siempre que  $x \in B_S(p, \delta)$ , lo cual es la propia definición de continuidad de la función  $f$  en el punto  $p$ .

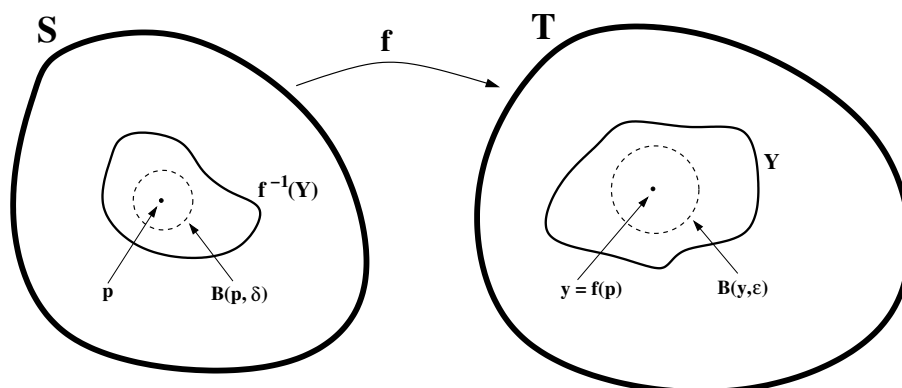


Figura 3.4: La antiimagen de un abierto es un abierto si y sólo si la función es continua.

### 3.7. Continuidad sobre conjuntos compactos.

Otra de las propiedades globales de las funciones continuas es que aplican conjuntos compactos en conjuntos compactos.

**Teorema 47** Sea  $f : (S, d_S) \rightarrow (T, d_T)$ . Si  $f$  es continua en un subconjunto compacto  $X \subset S$ , entonces la imagen  $f(X)$  es un subconjunto compacto de  $T$ . En particular,  $f(X)$  es un conjunto cerrado y acotado de  $T$ .

*Demostración:* Sea  $F$  un recubrimiento abierto de  $f(X)$ , es decir,  $f(X) \subset \bigcup_{A \in F} A$ . Probaremos que un número finito de conjuntos  $A$  recubre a  $f(X)$ . Como  $f$  es continua sobre el subespacio métrico  $(X, d_S)$ , podemos aplicar el teorema 45 para concluir que cada uno de los conjuntos  $f^{-1}(A)$  es abierto en  $(X, d_S)$ . Los conjuntos  $f^{-1}(A)$  forman un recubrimiento abierto de  $X$  y, como  $X$  es compacto, un número finito de ellos recubre a  $X$ . Sea  $X \subset f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_p)$ . Entonces

$$f(X) \subset f[f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_p)] = f[f^{-1}(A_1)] \cup \dots \cup f[f^{-1}(A_p)] \subset A_1 \cup \dots \cup A_p$$

Hemos construido entonces una colección finita de abiertos que recubre a  $f(X)$ , por lo tanto deducimos que es compacto.

Como corolario, aplicando el teorema 29 podemos decir que  $f(X)$  es cerrado y acotado.

**Definición 59** Una función  $\vec{f} : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  está acotada en  $S$  si existe un número positivo  $M$  tal que  $\|\vec{f}(x)\| \leq M$  para cada  $x \in S$ .

Como  $\vec{f}$  está acotada en  $S$  si, y sólo si,  $f(S)$  es un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$ , del teorema anterior deducimos el siguiente corolario.

**Teorema 48** Sea  $\vec{f} : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de un espacio métrico  $(S, d_S)$  en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$ . Si  $\vec{f}$  es continua en un subconjunto compacto  $X \subset S$ , entonces  $\vec{f}$  está acotada en  $X$ .

Este teorema nos permite deducir consecuencias importantes en el caso de funciones reales, es decir, de  $\mathbb{R}^1$ . Si  $f$  es una función real acotada sobre  $X$ , entonces  $f(X)$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  acotado, por lo tanto posee supremo e ínfimo, y se cumple que  $\inf f(X) \leq f(x) \leq \sup f(X)$  para todo  $x \in X$ .

El siguiente teorema prueba que una función real continua  $f$  alcanza el  $\sup f(X)$  y el  $\inf f(X)$  si  $X$  es compacto.

**Teorema 49** (de Weierstrass) Sea  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  una función real de un espacio métrico  $(S, d_S)$  en el espacio euclídeo  $\mathbb{R}$ . Supongamos que  $f$  es continua en un subconjunto  $X$  compacto en  $S$ . Entonces existen puntos  $p$  y  $q$  de  $X$  tales que

$$f(p) = \inf f(X), \quad f(q) = \sup f(X)$$

Como  $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$  para todo  $x \in X$ , los números  $f(p)$  y  $f(q)$  se llaman, respectivamente, los valores mínimo y máximo globales o absolutos de  $f$  en  $X$ .

*Demostración:* A partir del teorema 47 sabemos que si  $X$  es compacto y  $f$  continua, entonces  $f(X)$  es compacto, lo cual implica que es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  cerrado y acotado. Sea  $m = \inf[f(x)]$ , entonces  $m$  es adherente a  $f(X)$  y, por ser  $f(X)$  cerrado,  $m \in f(X)$ . Por lo tanto podemos escribir que  $m = f(p)$  para un cierto  $p$  de  $X$ . De modo análogo se razona que debe existir cierto  $q$  tal que  $f(q) = \sup[f(X)]$ .

Que  $X$  sea compacto es esencial. Considérese por ejemplo la función  $f(x) = 1/x$  en  $X = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ ; es continua en  $X$ , pero no existe ningún punto  $q \in X$  tal que  $f(q) = \sup f(X)$ . Incluso funciones acotadas de comportamiento más simple sirven de contraejemplo. La función  $g(x) = 2x$ , definida en  $X = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ , no alcanza el supremo ni el ínfimo de su recorrido puesto que  $f(X) = (0, 2) \subset \mathbb{R}$ .

**Teorema 50** Sea  $f : (S, d_S) \rightarrow (T, d_T)$  una función entre dos espacios métricos. Supongamos que  $f$  es uno a uno sobre  $S$ , de modo que la función inversa  $f^{-1}$  existe. Si  $S$  es compacto y si  $f$  es continua en  $S$ , entonces  $f^{-1}$  es continua en  $f(S)$ , que también es compacto.

*Demostración.* El teorema 46 aplicado a  $f^{-1}$  nos permite decir que  $f^{-1}$  será continua en  $f(S)$  si, y sólo si, la antiimagen<sup>5</sup> de cualquier cerrado,  $X \subset f^{-1}(T) \subset S$ , es cerrada, es decir, si  $f(X) \subset T$  es cerrado. Como  $X \subset S$  es cerrado y  $S$  es compacto, entonces  $X$  es compacto<sup>6</sup>, con lo cual  $f(X)$  es compacto por ser  $f$  continua (teorema 47), y por lo tanto  $f(X)$  es cerrado, ya que en los espacios métricos todo conjunto compacto es cerrado y acotado.

**Definición 60** (homeomorfismos) Sea  $f : S \rightarrow T$  una función de un espacio métrico  $(S, d_S)$  en otro  $(T, d_T)$ . Supongamos también que  $f$  es uno a uno (biyectiva) en  $S$ , de modo que la función inversa  $f^{-1}$  existe. Si  $f$  es continua sobre  $S$  y  $f^{-1}$  es continua sobre  $f(S)$ , entonces diremos que  $f$  es una aplicación topológica o un homeomorfismo, y los espacios métricos  $(S, d_S)$  y  $(T, d_T)$  se llaman homeomorfos.

Si  $f$  es un homeomorfismo, entonces  $f^{-1}$  también lo es. El teorema 45 prueba que un homeomorfismo aplica subconjuntos abiertos de  $S$  en subconjuntos abiertos de  $f(S)$ . También aplica subconjuntos cerrados de  $S$  en subconjuntos cerrados de  $f(S)$ . Una propiedad de un conjunto que permanezca invariante frente a las distintas aplicaciones topológicas se llama una propiedad topológica. Por lo tanto, las propiedades de ser abierto, cerrado, compacto son propiedades topológicas.

Un ejemplo importante de homeomorfismo lo constituyen las isometrías, definidas como aplicaciones  $f : S \rightarrow T$  biyectivas que conservan la métrica, es decir, que cumplen  $d_T(f(x), f(y)) = d_S(x, y)$  para todos los puntos  $x$  e  $y$  de  $S$ . Si existe una isometría entre  $(S, d_S)$  y  $(T, d_T)$ , los dos espacios métricos se denominan isométricos.

### 3.8. Teorema de Bolzano.

El teorema de Bolzano hace referencia a una propiedad global de las funciones reales continuas en intervalos compactos  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . En palabras llanas, diríamos que si la gráfica de una función  $f$  es positiva en  $f(a)$  y negativa en  $f(b)$ , entonces la función debe anularse por lo menos una vez entre  $a$  y  $b$ . Antes de enunciar el teorema de Bolzano demostraremos uno auxiliar.

<sup>5</sup>Obsérvese que  $f(X)$  es la imagen inversa (antiimagen) de  $X$  por medio de  $f^{-1}$ .

<sup>6</sup>Todo subconjunto cerrado de un espacio métrico compacto es compacto.

**Teorema 51** Sea  $f$  definida en un intervalo  $S \subset \mathbb{R}$ . Supongamos que  $f$  es continua en un punto  $c \in S$  y que  $f(c) \neq 0$ . Entonces existe una bola unidimensional  $B(c, \delta)$  tal que  $f(x)$  tiene el mismo signo que  $f(c)$  en  $B(c, \delta) \cap S$ .

*Demostración:* Supongamos primeramente que  $f(c) > 0$ . Por ser  $f$  continua, para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  tal que  $f(c) - \epsilon < f(x) < f(c) + \epsilon$  siempre que  $x \in B(c, \delta) \cap S$ . Elijamos entonces el  $\delta$  que corresponde a  $\epsilon = f(c)/2$ , ( $\epsilon > 0$  por ser  $f(c) > 0$ ). Por lo tanto se verifica  $\frac{1}{2}f(c) < f(x) < \frac{3}{2}f(c)$  siempre que  $x \in B(c, \delta) \cap S$ , lo cual implica que  $f(x)$  tiene el mismo signo que  $f(c)$  en  $B(c, \delta) \cap S$ . La demostración se hace de modo análogo para el caso  $f(c) < 0$ , escogiendo  $\epsilon = -f(c)/2$ .

**Teorema 52** (de Bolzano) Sea  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función real y continua en el intervalo compacto  $[a, b]$ , y supongamos que  $f(a)f(b) < 0$ , es decir, que  $f(a)$  y  $f(b)$  tienen signos opuestos. Entonces existe, por lo menos, un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .

*Demostración:* Escojamos  $f(a) > 0$  y  $f(b) < 0$ , y sea el conjunto  $A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq 0\}$ . Sabemos que  $A \neq \emptyset$  porque  $a \in A$ , y además  $A$  está acotado por  $b$ , por lo tanto tiene supremo. Sea  $c = \sup(A)$ . Se cumple que  $a < c < b$ . Probemos que  $f(c) = 0$ . Si fuese  $f(c) \neq 0$  debería existir una bola unidimensional  $B(c, \delta)$  en la que  $f$  tiene el mismo signo que  $f(c)$ . Si fuese  $f(c) > 0$ , habría puntos  $x > c$  en los que  $f(x) > 0$ , en contradicción con la hipótesis de que  $c = \sup(A)$ . Si fuese  $f(x) < 0$ , entonces  $c - \frac{\delta}{2}$  sería una cota superior para  $A$  menor que  $c$ , en contradicción de nuevo con la definición de  $c$ . Debe entonces cumplirse que  $f(c) = 0$ .

*Observación:* es importante exigir que la función sea continua en todos los puntos del intervalo cerrado  $[a, b]$ , no basta con que sea continua en el abierto  $(a, b)$ . Considera por ejemplo la función definida en  $[0, 1]$  como  $f(x) = 1$  si  $0 < x \leq 1$  y  $f(0) = -1$ . Esta función es continua en todos los puntos del intervalo  $(0, 1)$ , pero no en todos los del intervalo cerrado  $[0, 1]$ . A pesar de que  $f(0)$  es negativa y  $f(1)$  es positiva, no existe ningún  $x \in (0, 1)$  para el que  $f(x) = 0$ .

**Teorema 53** (del valor intermedio) Sea  $f$  real y continua en un intervalo compacto  $S = [a, b] \subset \mathbb{R}$ . Supongamos que existen dos puntos  $\alpha < \beta$  de  $S$  tales que  $f(\alpha) \neq f(\beta)$ . Entonces  $f$  toma todos los valores comprendidos entre  $f(\alpha)$  y  $f(\beta)$  en el intervalo  $(\alpha, \beta)$ .

*Demostración:* Para cualquier número  $k \in (f(\alpha), f(\beta))$ , aplicamos el teorema de Bolzano a la función  $g$  definida en  $[\alpha, \beta]$  por medio de la expresión  $g(x) = f(x) - k$ . Así definida es fácil ver que  $g(\alpha)g(\beta) < 0$ , por lo tanto debe anularse para algún punto intermedio  $c$ , es decir,  $g(c) = 0 = f(c) - k$ . Hemos probado entonces que la función  $f$  alcanza todos los valores comprendidos entre  $f(\alpha)$  y  $f(\beta)$  en el intervalo  $(\alpha, \beta)$ .

El teorema del valor intermedio, junto con el teorema 50, nos permite afirmar que la imagen de un intervalo compacto  $S$  por medio de una función real continua en  $S$  es el intervalo compacto  $[\inf f(S), \sup f(S)]$ . En el caso especial de que  $f$  fuese constante en  $S$ , entonces el intervalo sería degenerado.

### 3.9. Continuidad uniforme.

La continuidad que hemos definido anteriormente es una propiedad local de las funciones. Recordemos que dada una función entre dos espacios métricos,  $f : (S, d_S) \rightarrow (T, d_T)$ , se dice que  $f$  es continua en cada punto de  $A \subset S$  si para todo  $p \in A$  y  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  (que depende del punto  $p$  y de  $\epsilon$ ) tal que, si  $x \in A$ , entonces  $d_T(f(x), f(p)) < \epsilon$  siempre que  $d_S(x, p) < \delta$ . Ahora bien, una vez fijado  $\epsilon$  no debemos esperar que el mismo  $\delta$  sirva para todos los puntos de  $A$ , pero puede ocurrir que así sea, y en ese caso se dice que la función es uniformemente continua en  $A$ . Damos ahora una definición formal.

**Definición 61** Sea  $f : (S, d_S) \rightarrow (T, d_T)$ . Se dice que  $f$  es uniformemente continua en un subconjunto  $A \subset S$  si se verifica la siguiente condición: para cada  $\epsilon > 0$  existe un  $\delta > 0$  (que depende exclusivamente de  $\epsilon$ ) tal que si  $x_1 \in A$  y  $x_2 \in A$  entonces  $d_T(f(x_1), f(x_2)) < \epsilon$  siempre que  $d_S(x_1, x_2) < \delta$ .

Ejemplos:

1. Sea  $f(x) = 1/x$  para  $x > 0$  y consideremos  $A = (0, 1]$ . Esta función es continua en  $A$ , pero no uniformemente continua. Para verlo tomemos  $\epsilon = 10$  y supongamos que podemos encontrar un  $\delta$ , con  $0 < \delta < 1$ , que satisfaga la condición de continuidad uniforme. Haciendo  $x_1 = \delta$  y  $x_2 = \delta/11$  tendríamos  $|x_1 - x_2| < \delta$ , y sin embargo  $|f(x_1) - f(x_2)| = \frac{11}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{10}{\delta} > 10$ . Por tanto para estos dos puntos siempre tendríamos  $|f(x_1) - f(x_2)| > 10$ , en contra de la condición de continuidad uniforme.
2. Sea  $f(x) = x^2$  para todo  $x \in \mathbb{R}$  y tomemos  $A = (0, 1]$ . Probaremos que esta función es uniformemente continua en  $A$ . Obsérvese que  $|f(x_1) - f(x_2)| = |x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| = |x_1 + x_2||x_1 - x_2| < 2|x_1 - x_2|$ . Si  $|x_1 - x_2| < \delta$  entonces  $|f(x_1) - f(x_2)| < 2\delta$ . Con lo cual una vez fijado  $\epsilon$ , basta tomar  $\delta = \epsilon/2$  para garantizar que  $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$  para cada par  $x_1, x_2$  con  $|x_1 - x_2| < \delta$ . Esto prueba que  $f$  es uniformemente continua en  $A$ . Esta misma función, sin embargo, no es uniformemente continua en todo  $\mathbb{R}$ .

Es evidente que si  $f : (S, d_S) \rightarrow (T, d_T)$  es uniformemente continua en  $A \subset S$ , entonces  $f$  es continua en  $A \subset S$ . El recíproco no es cierto, a menos que  $A$  sea compacto.

**Teorema 54** (de Heine) Sea  $f : (S, d_S) \rightarrow (T, d_T)$ . Sea  $A \subset S$  un subconjunto compacto de  $S$  y supongamos que  $f$  es continua en  $A$ . Entonces  $f$  es uniformemente continua en  $A$ .

Damos a continuación una condición suficiente para garantizar la continuidad uniforme de una función real de variable real. Para ello definimos previamente las *funciones lipschitzianas*.

**Definición 62** Una función  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  se dice *lipschitziana* en  $A$  si existe una constante  $k > 0$  tal que se verifica  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$  para todo  $x_1, x_2 \in A$ .

**Teorema 55** Si  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función lipschitziana en el intervalo  $A$ , entonces  $f$  es uniformemente continua en  $A$ .

*Demostración:* Sea  $k$  la constante de Lipschitz de  $f$  en  $A$ . Dado  $\epsilon$  podemos tomar  $\delta = \epsilon/k$ , de tal modo que para cualesquiera  $x_1, x_2 \in I$  se cumple:

$$|x_1 - x_2| < \frac{\epsilon}{k} \implies |f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2| < k \frac{\epsilon}{k} = \epsilon$$

Estudiaremos la derivada de funciones en el siguiente tema, pero es útil mencionar aquí que para que una función  $f$  satisfaga la condición de Lipschitz en  $A$  es suficiente que sea derivable y tenga derivada acotada en  $A$ . Deducimos por tanto que si  $f$  tiene derivada acotada en el intervalo  $A$ , entonces es uniformemente continua en  $A$ . El recíproco, no obstante, no es cierto. Es decir, una función con derivada no acotada puede ser uniformemente continua. Un ejemplo lo tenemos en la función  $f(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ , que veremos en los ejercicios.

### Teorema del punto fijo para contracciones.

**Definición 63** Dada una función  $f$  de un espacio métrico en sí mismo,  $f : (S, d_S) \rightarrow (S, d_S)$ , un punto  $p \in S$  se dice *punto fijo* de  $f$  si se satisface  $f(p) = p$ . La función  $f$  se denomina *contracción* de  $S$  si existe un número  $0 < \alpha < 1$ , llamado *constante de contracción* ó *coeficiente de contracción*, tal que  $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$  para cada  $x, y$  de  $S$ .

Una contracción de un espacio métrico es uniformemente continua.

**Teorema 56** (del punto fijo): Una contracción de un espacio métrico completo tiene un único punto fijo.

### 3.10. Discontinuidad de las funciones reales.

Estudiaremos ahora los tipos de discontinuidades de funciones reales definidas en intervalos de  $\mathbb{R}$ . Sea  $f$  una función real definida en  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  y sea  $c \in [a, b)$ . Si  $f(x) \rightarrow A$  cuando  $x \rightarrow c$  con valores mayores que  $c$ , diremos que  $A$  es el límite lateral por la derecha de  $f$  en  $c$ , y lo indicaremos de este modo:

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = A.$$

Este límite también se suele denotar por  $f(c^+)$ . Obsérvese que  $f$  no necesita estar definida en  $c$  para que exista el límite lateral  $f(c^+)$  pero, si lo está y es  $f(c) = f(c^+)$ , diremos que  $f$  es continua por la derecha en  $c$ . El límite lateral por la izquierda,  $f(c^-)$ , y la continuidad por la izquierda en  $c$  se define análogamente si  $c \in (a, b]$ .

Si  $a < c < b$ , entonces  $f$  es continua en  $c$  si, y sólo si  $f(c^+) = f(c^-) = f(c)$ . Si esto no ocurre diremos que  $f$  es discontinua en  $c$  y deberá darse alguna de las siguientes condiciones:

- Existen  $f(c^+)$  y  $f(c^-)$ , pero son distintos. Se denomina discontinuidad inevitable ó esencial (de primera especie).
- Uno de los límites  $f(c^+)$  ó  $f(c^-)$  no existe, o no existe ninguno. Se denomina discontinuidad inevitable ó esencial (de segunda especie).
- Existen  $f(c^+)$  y  $f(c^-)$ , pero  $f(c^+) = f(c^-) \neq f(c)$ . Se denomina discontinuidad evitable, puesto que se podría *evitar* redefiniendo la función en el punto  $c$  para que coincida con los límites laterales.

**Definición 64** Sea  $f$  una función definida en el intervalo cerrado  $[a, b]$ . Si  $f(c^+)$  y  $f(c^-)$  existen para un punto interior  $c \in (a, b)$ , entonces:

- $f(c) - f(c^-)$  se llama salto de  $f$  a la izquierda de  $c$ .
- $f(c^+) - f(c)$  se llama salto de  $f$  a la derecha de  $c$ .
- $f(c^+) - f(c^-)$  se llama salto de  $f$  en  $c$ .

Si alguno de estos saltos es distinto de cero se dice que  $f$  tiene una discontinuidad de salto en  $c$ .

Ejemplos:

- La función  $f$  definida como  $f(x) = x/|x|$  si  $x \neq 0$  y  $f(0) = A$  tiene una discontinuidad inevitable de salto en 0, independientemente del valor de  $A$ . En este caso se tiene  $f(0^+) = +1$  y  $f(0^-) = -1$ .
- La función  $f(x) = 1$  si  $x \neq 0$  y  $f(0) = 0$ , posee un salto de discontinuidad evitable en 0. En este caso  $f(0^+) = f(0^-) = +1$ .
- $f(x) = 1/x$  si  $x \neq 0$  y  $f(0) = A$  tiene un punto de discontinuidad inevitable en 0.

### 3.11. Ejercicios.

- Demostrar aplicando la definición de convergencia que:
  - $\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n^2} \rightarrow 0$
  - $\frac{2n+3}{3n-50} \rightarrow \frac{2}{3}$
- Demostrar aplicando la definición que:
  - $\frac{2^n}{n!} \rightarrow 0$
  - $\frac{n!}{n^n} \rightarrow 0$
- Demostrar que toda sucesión en  $\mathbb{R}$  que es monótona creciente y acotada superiormente es una sucesión de Cauchy.
- Demostrar que la sucesión definida por  $a_1 = \sqrt{5}$  y  $a_n = \sqrt{5 + a_{n-1}}$  es convergente y calcular su límite.
- Demostrar que si  $|a| < 1$  entonces la sucesión  $x_n = a^n$  es convergente y  $x_n \rightarrow 0$ . Estudia también el caso  $|a| = 1$ .
- Demostrar que el límite de las siguientes sucesiones es 1:
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c}$ ,
  - $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$
- Justifica razonadamente si el conjunto  $M = \{2^{1/n} + 3^{1/n}; n \in \mathbb{Z}^+\} \cap \mathbb{I}$  está acotado (superior e inferiormente) y tiene ó no, supremo, ínfimo, máximo y mínimo.
- Calcular el límite de la sucesión  $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$  donde  $a$  y  $b$  son números reales positivos.
- Calcular el límite de las sucesiones  $x_n = n \left[ \sqrt{9 - \frac{1}{n}} - 3 \right]$ , e  $y_n = n \left[ \sqrt[3]{27 - \frac{1}{n}} - 3 \right]$ .
- Demostrar que la sucesión  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  es convergente en  $\mathbb{R}$ .
- Demostrar que la sucesión  $x_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$  converge a  $1/e$ .
- Basándose en la definición de límite, demostrar:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x} = \frac{3}{2} \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x-9}{5x-1} = \frac{3}{5}$$

En el apartado (a) busca el valor concreto de  $\delta = |x-2|$  para que la distancia entre  $f(x)$  y el límite sea menor que  $\epsilon = 0,001$ , es decir  $|f(x) - (3/2)| < 0,001$ .

$$13. \text{ Calcular } \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a^2 + ax + x^2} - \sqrt{a^2 - ax + x^2}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}}, \qquad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^3 - 2x^2 + x}.$$

14. Calcular los límites cuando  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  de las funciones

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{(xy)^2}{(xy)^2 + (x-y)^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$15. \text{ Calcular: } \text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}, \quad \text{b) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \text{c) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 - y^2}.$$

16. Demuestra que no existe el  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$ , pero sí el  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin(1/x)$ .

17. Demostrar que el límite  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,a)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}$ , existe para  $a = 0$ , pero no existe para  $a \neq 0$ .

$$18. \text{ Calcula el } \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,+1)} \frac{(xy+1)^2}{(x+1)^2 + (y-1)^2}.$$

19. Estudiar la continuidad de  $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{x^2}[(1+x)^n - 1 - nx], & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{n(n-1)}{2}, & \text{si } x = 0 \end{array} \right\}$

20. Estudiar para qué puntos es discontinua la siguiente función:

$$f(x, y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}, & \text{si } |x| \neq |y| \\ 1, & \text{si } x = y \\ 0, & \text{si } x = -y \end{array} \right\}$$

21. Localizar y clasificar las discontinuidades de las siguientes funciones reales de variable real:

a)  $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{1/x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{array} \right\}$       b)  $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} e^{1/x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{array} \right\}$

c)  $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{1 - e^{1/x}}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{array} \right\}$

22. Sean  $f$  y  $g$  dos funciones reales continuas en el intervalo  $[a, b]$  y tales que  $f(a) < g(a)$  y  $f(b) > g(b)$ . Demostrar que existe un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = g(c)$ , es decir, que las gráficas de las funciones se cruzan.

23. Demostrar que las siguientes ecuaciones admiten al menos una raíz real:

a)  $x - \operatorname{sen} x - 1 = 0$ ,      b)  $x^{11} + \frac{3}{2 + x^2 + \operatorname{sen}^2 x} - 150 = 0$ .

24. Sea  $f : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua tal que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c$ , con  $c \in \mathbb{R}$ . Demostrar que  $f$  es una función acotada.

25. Averiguar si las funciones que se indican a continuación son o no uniformemente continuas en sus respectivos dominios.

a)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ .

b)  $g : [2, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2$ .

c)  $h : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = x \operatorname{sen}(1/x)$ .

d)  $j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{sen}(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{array} \right\}$ .

e)  $k : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $k(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ .

26. Demostrar que: (a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ , (b)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + \alpha x)^{1/x} = e^\alpha$ , (c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$ ,

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = 1$ .

27. Demostrar que: a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log(a)$

28. Demostrar que:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$

29. Estudia la continuidad de las siguientes funciones para todos los posibles valores que puedan tomar los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , y  $d$ .

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x + bx^2 \cos(1/x)}{cx + dx^2 \sin(1/x)}, & \text{si } x > 0 \\ 1, & \text{si } x = 0 \\ a(-x)^x, & \text{si } x < 0 \end{array} \right\}, \quad g(x) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{(x^2 - 1)}{3(x-1) - \sin(x-1)}, & \text{si } x \neq 1 \\ a, & \text{si } x = 1 \end{array} \right\}$$

30. Sea  $\{a_n\}$  una sucesión de números reales de la que se sabe que para un cierto  $k \in \mathbb{R}$  y  $\forall n \in \mathbb{N}$  verifica:

$$\frac{kn - 3\sqrt{n}}{\sqrt{n^2 + 6n}} \leq a_n \leq \frac{\sqrt{4n + 9} - \sqrt{n}}{\sqrt{n + 1}}$$

¿Qué valor debería tener  $k$  para garantizar que  $\{a_n\}$  sea convergente? ¿Cuál sería entonces el límite de  $\{a_n\}$ ?

31. Estudia la continuidad uniforme en el intervalo  $[-3, 3]$  de las siguientes funciones:

$$f(x) = x + 2, \quad g(x) = x^3, \quad h(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$